Ebenengleichung in Parameterform

Aufgabe 1

Gesucht ist eine Gleichung der Ebene E durch die Punkte A(1; -2; 2); B(2; 1; -1) und C(4; 1; 2) in Parameterform.

Lösung:

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-(-2) \\ -1-2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-(-2) \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Koordinatenform / Normalform

Aufgabe 2

Schreibe in Koordinatenform:

$$E:\ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

Lösung:

Multipliziert man die obige Normalengleichung aus, so erhält man eine Koordinatengleichung der Ebene:

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

Somit ergibt sich

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 - (-1 + 2 - 3) = 0\ ,$$

womit wir eine Gleichung von E in Koordinatenform erhalten:

$$E:\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = -2$$

Man kann die Komponenten des Vektors $\vec{x}$ auch mit x, y und z bezeichnen:

$$E:\ -x + y + 3z = -2$$

Aufgabe 3

Wie ist die Lage der Ebenen E_1: x - y + 2z = 8, E_2: 2x – 2y + 4z = 16, E_3: 2x – 2y + 4z = 10 und E_4: 5x – 2y + 5z = 1 zueinander?

Lösung:

Die beiden Ebenen

$$E_1: x - y + 2z = 8 \text{ und } E_2: 2x - 2y + 4z = 16$$

sind identisch, während

$$E_3: 2x - 2y + 4z = 10$$

parallel zu beiden Ebenen E_1 und E_2 ist. Die Ebene

$$E_4: 5x - 2y + 5z = 1$$

wäre weder parallel zu noch identisch mit einer der Ebenen E_1 bis E_3, denn der Normalenvektor

$$\vec{n}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

dieser Ebene ist kein Vielfaches der Normalenvektoren der anderen Ebenen.

Aufgabe 4

Schreibe in Normalform:

$$E: 2x - y + z = 4$$

Lösung:

Den Normalenvektor kann man einfach ablesen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Einen Punkt in der Ebene E findet man auch schnell, denn dieser muss die Gleichung erfüllen. Setzt man z.B. y = 0 und z = 0, so ergibt sich 2x = 4 und x = 2. Somit wäre P(2; 0; 0) ein Punkt der Ebene und wir haben eine Normalform von E:

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Parameterform in Koordinarenform

Aufgabe 5

Schreibe in Koordinatenform:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. Möglichkeit: Mit der Ebenengleichung ergibt sich:

(1) $x = -1 + s + t$

(2) $y = 1 - s - 2t$

(3) $z = 2 + 2s + 2t$

Man kann zwei der obigen Gleichungen (wir wählen (1) und (2)) nach s und t auflösen:

(1) + (2) $\quad x + y = -t$

Somit ist $t = -x - y$. In (1) einsetzen ergibt $x = -1 + s - x - y$ und somit $s = 2x + y + 1$.

Nun setzen wir dies in (3) ein:

$$z = 2 + 2(2x + y + 1) + 2(-x - y)$$

Damit ergibt sich E: $-2x + z = 4$.

2. Möglichkeit:
Der Normalenvektor $\vec{n}$ ist zu den beiden Richtungsvektoren orthogonal. Damit gilt

$$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \text{ und } \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Hieraus ergeben sich 2 Gleichungen für 3 Unbekannte:

$$n_1 - n_2 + 2n_3 = 0$$

$$n_1 - 2n_2 + 2n_3 = 0$$

Damit ist $\vec{n}$ bis auf die Länge festgelegt. Wir eliminieren nun eine Unbekannte, z.B. n_1 durch Subtraktion der beiden Gleichungen. Wir erhalten $n_2 = 0$. Hier sind jetzt gleich 2 Variablen entfallen. Nun können wir eine der anderen beiden Variablen auf einen Wert setzen (nicht auf Null!), z.B. $n_3 = 1$. Falls nicht, wie in diesem Beispiel, gleich zwei Variablen entfallen, dann setzt man in der sich ergebenden Gleichung mit zwei Variablen eine auf einen Wert. Setzen wir nun die Werte für n_2 und n_3 in beispielsweise die oberste Gleichung ein, so ergibt sich $n_1 - 0 + 2 = 0$, womit $n_1 = -2$ ist. Wir haben nun einen Normalenvektor gefunden (einen, da er auch eine andere Länge haben könnte und somit auch Vielfache dieses Vektors Normalenvektoren sind):

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir verwenden den Stützvektor aus der Parameterform und stellen eine Normalform auf:

$$\text{E: } \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Ausmultiplizieren führt zur Koordinatenform:

$$\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -2x + z = 4$$

3. Möglichkeit:
Man geht wie bei der Möglichkeit 2 vor, nur dass man den Normalenvektor $\vec{n}$ über das so genannte Kreuzprodukt bzw. Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren bestimmt.

Das Vektorprodukt ist ein spezielles Produkt zwischen zwei Vektoren, bei dem sich wieder ein Vektor ergibt, der orthogonal zu den beiden ursprünglichen Vektoren ist. D.h. mit

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

gilt für die Skalaprodukte $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{w} = 0$.

Der Normalenvektor $\vec{n}$ ist zu den beiden Richtungsvektoren orthogonal.

Hier:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+4 \\ 2-2 \\ -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nun kann man wie bei Möglichkeit 2 vorgehen und die Normalengleichung und dann die Koordinatengleichung bestimmen. Dabei ergibt sich das (-1)-fache der Koordinatengleichung aus Möglichkeit 2, da wir einen Normalenvektor erhalten haben, der das (-1)-fache des Normalenvektors aus Möglichkeit 2 darstellt.

Koordinatenform in Parameterform

Aufgabe 6

Schreibe in Parameterform:

$$E: 2x - 4y + 2z = 8$$

Lösung :

Nun kann man wie folgt vorgehen. Man löst die Gleichung nach einer Variablen auf, z.B. x:

$$2x = 8 + 4y - 2z$$

$$x = 4 + 2y - z$$

Nun setzt man die anderen beiden Variablen auf Parameter, z.B. y = r und z = s:

$$\begin{aligned} x &= 4 + 2r - s \\ y &= \quad\;\; r \\ z &= \qquad\quad s \end{aligned}$$

Damit haben wir bereits eine Parameterform, wir müssen die oberen drei Gleichungen nur in Matrix-Vektor-Form schreiben:

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

Beschreibe die Lage der Ebenen

a) E: z=0
b) E: -x + y = 4

Lösung:

a) Diese Ebene ist mit der x-y-Ebene identisch, denn z = 0 und x und y sind beliebig. Damit wäre z.B. P(1; 2; 0) ein Punkt dieser Ebene. F: z = 1 wäre eine zu E parallele Ebene. F ist parallel zur x-y-Ebene und hat zu dieser den Abstand 1. Z.B. ist Q(1; 2; 1) ein Punkt dieser Ebene, oder R(0; 0; 1).

b) Bei Punkten dieser Ebene ist die z-Komponente beliebig, nur zwischen der x- und y-Komponente muss die Beziehung –x + y = 4 bestehen. Diese Ebene ist somit parallel zur z-Achse.

Punktprobe Ebenen

Aufgabe 8

Es soll geprüft werden, ob der Punkt P(3; 10, -2) auf der Ebene mit der Gleichung

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

liegt.

Lösung:

Wenn dieser Punkt auf der Ebene E liegt, so gibt es ein s und ein t, so dass

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

gilt, bzw.:

$$(1)\ 3 = 1 - 2s + 2t$$

(2) 10 = 2 + 4s + 2t

(3) -2 = 1 + s - 2t

Wir wählen zwei Gleichungen aus, lösen diese nach s und t auf und manchen dann die Probe mit der nicht ausgewählten Gleichung.

Wir wählen hier (2) und (3), denn wenn wir diese addieren, erhalten wir 8 = 3 + 5s, womit s = 1 ist. Einsetzen von s = 1 in (3) ergibt -2 = 1 + 1 – 2t, womit t = 2 ist. Die Probe mit der ersten Gleichung ergibt 3 = 1 – 2 + 4, womit diese erfüllt ist und P in E liegt.

Ist die Ebene in Koordinatenform gegeben, so muss man nur den Punkt in die Ebenengleichung einsetzen und prüfen, ob diese erfüllt ist.

Schnittpunkt Ebene/Gerade, Schnittwinkel

Aufgabe 9

Bestimme gegebenenfalls den Schnittpunkt von

$$g:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Gleichsetzen ergibt drei Gleichungen mit drei Unbekannten:

(1) 1 + 2r = 2 - s + 2t

(2) -r = -2 + s + t

(3) -6 + 4r = 1 + s + 2t

Hier ergibt sich genau eine Lösung (man kann hier z.B. die erste Gleichung zur zweiten und zur dritten addieren, womit man jeweils eine Gleichung nur mit den Variablen r und t erhält, die man dann lösen kann): r = 2, s = -1 und t = 1. Schnittpunkt ist hier S(5; -2, 2).

Aufgabe 10

Bestimme den Schnittpunkt und Schnittwinkel von

$$g:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und } E: 2x + 2y + z = 4$$

Lösung:

Mit der Gleichung von g ergibt sich:

$x = 1 + 2r$

$y = \quad -2r$

$z = -6 + 4r$

In E eingesetzt ergibt sich:

$$2(1 + 2r) + 2(-2r) - 6 + 4r = 4$$

$$2 + 4r - 4r - 6 + 4r = 4$$

Somit ist r = 2 und es gibt einen Schnittpunkt. Wäre r komplett entfallen und es würde sich z.B. 4 = 4 ergeben, so hätte g in E gelegen. Hätte sich z.B. 0 = 4 ergeben, so wäre g parallel zu E gewesen. Wir können nun den Schnittpunkt S bestimmen, wenn wir r = 2 in die Gleichung für g einsetzen:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow S(5; -4; 2)$$

Schnittwinkel:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 4 - 4 + 4 = 4,\ |\vec{n}| = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24},\ |\vec{v}| = \sqrt{4+4+1} = 3,$$

somit ist $\sin(\varphi) = \frac{4}{\sqrt{24} \cdot 3} \Rightarrow \varphi \approx 15{,}79°$.

Spurpunkte bei Ebenen

Aufgabe 11

Bestimme die Spurpunkte von

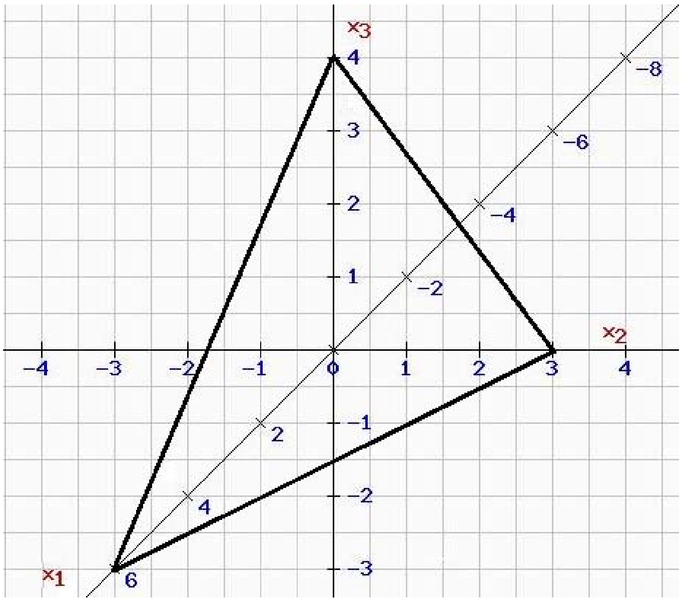
E: $2x + 4y + 3z = 12$

Lösung:

Für die Berechnung des Schnittpunktes mit der x-Achse S_x muss man y = 0 und z = 0 setzen:

$2x \qquad\qquad = 12$

Damit wäre x = 6 und $S_x(6; 0; 0)$. Analog ergibt sich $S_y(0; 3; 0)$ und $S_z(0; 0; 4)$.



Dividiert man die Ebenengleichung durch die rechte Seite (wenn diese von Null verschieden ist,sonst würden alle Spurpunkte im Ursprung liegen), so erhält man die Achsenabschnittsform, an der man alle Spurpunkte ablesen kann:

$$2x + 4y + 3z = 12 \mid :12$$

$$x/6 + y/3 + z/4 = 1$$

Wäre die Ebene E: 2x + y = 4 gegeben, so gäbe es keinen Schnittpunkt mit der z-Achse, da die Ebene parallel zu dieser verläuft. Wenn die Ebene in Parameterform gegeben ist, dann muss für jeden Spurpunkt ein Gleichungssystem gelöst werden, oder man müsste diese in die Koordinatenform umrechnen, was u. U. weniger aufwändig wäre.

Aufgabe 12

Berechne den Schnittpunkt von

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

mit der x-Achse.

Lösung:

Wenn wir den Schnittpunkt mit der x-Achse direkt berechnen wollten, müssten wir $y = 0$ und $z = 0$ setzen und das Gleichungssystem

$$0 = 1 - s + t$$

$$0 = 1 + s - 2t$$

lösen. Setzt man danach die Lösung für s und t in die Ebenengleichung ein, so erhält man den Schnittpunkt mit der x-Achse.

Lagebeziehung Ebene / Ebene, Schnittgerade, Schnittwinkel

Aufgabe 13

Wie ist die Lage der Ebenen zueinander?

a) E: $x + y + 2z = 8$
F: $x + y + 2z = 10$

b) E: $x + y + 2z = 8$
F: $2x + 2y + 4z = 16$

c) E: $x + y + 2z = 8$
F: $x + 2y + 4z = 10$

Lösung:

a) Die beiden Ebenen sind parallel, denn die linke Seite der Ebenengleichung ist identisch,
womit die Normalenvektoren identisch sind, aber die rechte Seite unterscheidet sich.

b) Die beiden Ebenen sind identisch, denn die Gleichungen sind Vielfache voneinander.

c) Die beiden Ebenen sind weder parallel noch identisch, denn die Normalvektoren sind keine Vielfachen voneinander. Die beiden Ebenen scheiden sich in einer Schnittgeraden.

Aufgabe 14

Bestimme die Gleichung der Schnittgeraden und den Schnittwinkel der Ebenen
E: $x + y + 2z = 8$
F: $x + 2y + 4z = 10$

Lösung :

Wir eliminieren x und subtrahieren die bedien Ebenengleichungen:

$$-y - 2z = -2$$

Nun setzen wir z.B. z = t und lösen obige Gleichung nach y auf:

$$-y - 2t = -2$$

$$y = -2t + 2$$

Nun können wir z = t und y = -2t + 2 entweder in die Gleichung von E oder in die von F einsetzen. Wir wählen E und erhalten:

$$x + (-2t + 2) + 2t = 8$$

Somit ist x = 6 und wir haben eine Gleichung der Schnittgeraden g gefunden:

$$x = 6$$

$$y = 2 - 2t$$

$$z = t$$

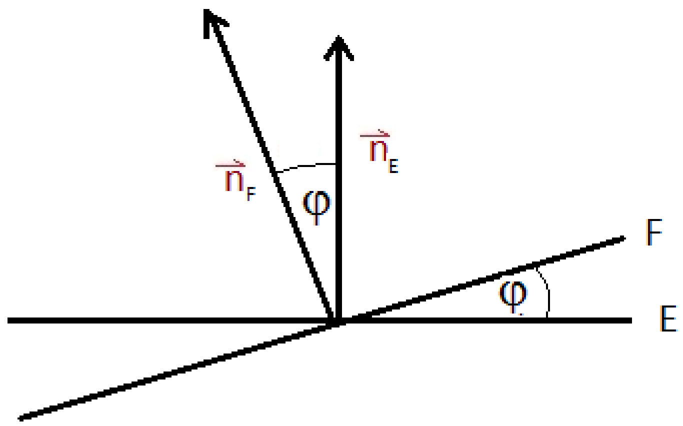
Somit ist

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um den Schnittwinkel der beiden Ebenen bestimmen zu können, muss man den Winkel zwischen den Normalenvektoren $\vec{n}_E$ und $\vec{n}_F$ bestimmen. Da sich, je nachdem wie die Richtungsvektoren stehen, auch ein Winkel α größer als 90° zwischen den Normalenvektoren ergeben kann, so gibt man in diesem Fall 180° - α als Schnittwinkel an, oder man verwendet den Betrag des Skalarproduktes bei der Winkelberechung (wie beim Schnittwinkel zwischen zwei Geraden.

Für den Schnittwinkel φ gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_F|}$$



Hier gilt:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ \cos(\varphi) = \frac{|1+2+8|}{\sqrt{1+1+4} \cdot \sqrt{1+4+16}} \Rightarrow \varphi \approx 11.49°$$

Aufgabe 15

Bestimme die Schnittgerade der Ebenen E und F.

E: $x - 2y + z = 8$

F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

Mit F erhält man

$$x = 1 + 2s + t$$

$$y = 1 + s + t$$

$$z = s + 2t$$

und diese in die Gleichung von E eingesetzt ergibt:

$$1 + 2s + t - 2(1 + s + t) + s + 2t = 8$$

$$-1 + s + t = 8$$

Lösen wir nach z.B. die Gleichung nach s auf, so erhalten wir s = 9 - t. Setzen wir dies in F ein, so erhalten wir eine Gleichung der Schnittgeraden:

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (9-t)\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

HNF, Abstand Punkt/Ebene, Lotfußpunkt

Beispiel:

Es soll der Abstand der Ebene E: 2x – 2y + z = 12 vom Punkt P(1; 0; 1) bestimmt werden.

Lösung:

Der Normalenvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kann wie immer einfach an der Koordinatenform abgelesen werden. Wir bestimmen dessen Länge:

$$|\vec{n}| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

Als nächstes dividieren wir die Gleichung von E durch die Länge des Normalvektors:

E: 2/3x – 2/3y + 1/3z = 4

Wenn die rechte Seite negativ wäre, so wird die Gleichung bei der Bestimmung der HNF mit -1 multipliziert. Auf der rechten Seite steht nun der Abstand der Ebene vom Ursprung (hier 4 LE). Subtrahieren wir noch 4 auf beiden Seiten, so dass man auf der rechten Seite eine Null erhält, so ergibt sich durch

E: 2/3x – 2/3y + 1/3z - 4 = 0

die HNF als Koordinatengleichung. Von einer Normalform ausgehend würde sich folgende Gleichung in vektorieller Form ergeben (für die Umwandlung in Normalform wurde ein Punkt von E benötigt, den wir erhalten, falls wir beispielsweise y = z = 0 setzen, womit wir (6; 0; 0) als Punkt von E erhalten):

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 0$$

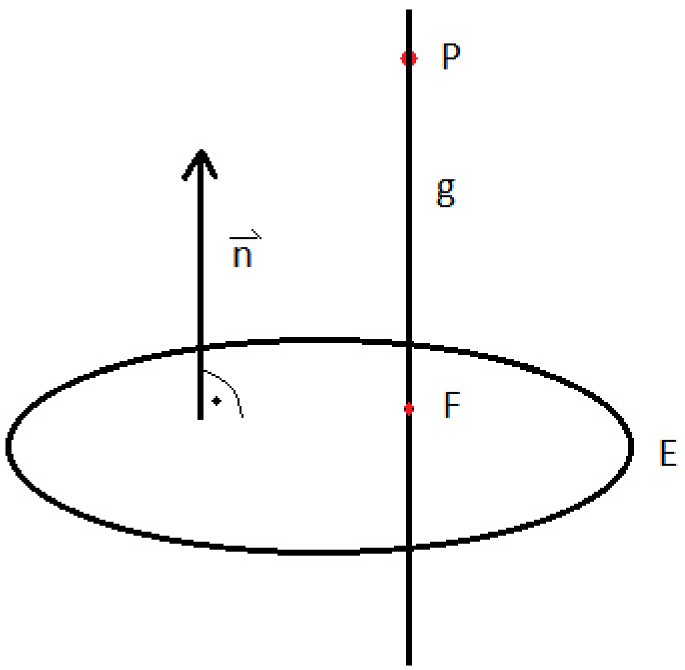
Der Abstand d(P, E) eines Punktes P(x; y; z) von E ergibt sich über:

$$d(P, E) = \left| \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right| = |2/3x - 2/3y + 1/3z - 4|$$

Für den Punkt P(1; 0; 1) gilt dann:

$$d(P, E) = |2/3 \cdot 1 - 2/3 \cdot 0 + 1/3 \cdot 1 - 4| = |-3| = 3$$

Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung des Abstandes eines Punktes von einer Ebene ist die folgende: Man konstruiert eine Hilfsgerade g, die den Punkt P als Stützvektor verwendet und den Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor. Damit ist die Hilfsgerade senkrecht zur Ebene und der Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene ist der Lotfußpunkt F. Der Abstand von P und F ist dann wieder der Abstand der Ebene zum Punkt. Dieses Verfahren kann man auch anwenden, wenn man einen Punkt an einer Ebene spiegeln möchte, oder wenn man eine Gerade in eine Ebene projizieren möchte.



Hier:
Die Hilfsgerade ist:

$$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir setzen x = 1 + 2t, y = -2t und z = 1 + t in E ein:

$$2(1 + 2t) - 2(-2t) + 1 + t = 12$$

$$2 + 4t + 4t + 1 + t = 12$$

Somit ist t = 1. In die Gleichung von g eingesetzt, ergibt sich der Ortsvektor des Lotfußpunktes:

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen den Vektor $\overrightarrow{PF}$ und dessen Länge:

$$\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left|\overrightarrow{PF}\right| = \sqrt{4+4+1} = 3.$$

Nun wollen wir noch zum Schluss den Punkt P an der Ebene E spiegeln:

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{OF'} + \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Also ergibt sich der gespiegelte Punkt $P'(5;-4;3)$.