Länge eines Vektors und Abstand von zwei Punkten

Aufgabe 1

Bestimme die Länge des Vektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Lösung:

Die Länge beträgt: $|\vec{x}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6$.

Skalarprodukt und Winkel zwischen Vektoren

Aufgabe 2

Es sind die Eckpunkte A(1; 2), B(4; 3) und C(3; 5) eines Dreiecks gegeben und es soll der Winkel α (an der Ecke A) bestimmt werden.

Lösung:

Man benötigt die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ oder $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{CA}$. Würde man den Winkel zwischen $\overrightarrow{AB}$ (der von A „weg zeigt“) und $\overrightarrow{CA}$ (der zu A „hin zeigt“) berechnen, so würde sich 180° - α ergeben.

Es gilt:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

analog ergibt sich $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Damit ist

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{9}{\sqrt{10 \cdot 13}}$$

und $\alpha \approx 37{,}87°$.

Lineare Unabhängigkeit

Aufgabe 3

Sind die folgenden Vektoren linear abhängig oder unabhängig?

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) Lässt sich der Vektor $\vec{v}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen?

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösung:

a) Die Vektoren sind linear abhängig bzw. komplanar, denn

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

b) Die Vektoren sind linear abhängig bzw. kollinear, denn

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

c) Wir müssen prüfen, ob es reelle Zahlen s und t gibt, so dass

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gilt. Es ergeben sich drei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

(1) $5 = s + 3t$

(2) -2 = 2s - 6t

(3) 1 = -s + 3t

Wir wählen die Gleichungen (1) und (3) aus und lösen diese nach s und t auf. Addiert man (1) und (3), so erhält man 6 = 6t, womit t = 1 wäre. Setzt man t = 1 in (1) ein, so ergibt sich 5 = s + 3, womit s = 2 wäre. Nun müssen wir die nicht verwendete Gleichung (2) prüfen und setzen unsere Lösungen für s und t in diese ein: -2 = 2·2 - 6. Damit ist die Gleichung (2) erfüllt und der Vektor $\vec{v}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Sind diese Vektoren linear abhängig?

Lösung:

Wir müssen nun prüfen, ob die Gleichung

$$r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nur eine Lösung (hier wären die Vektoren linear unabhängig), oder unendlich viele hat.

Also ergeben sich drei Gleichungen mit drei Unbekannten:

(1) -2r + s + 5t = 0

(2) 2r + 6s + 2t = 0

(3) $-r - 4s - 2t = 0$

(1) + (2) ergibt:

(4) $7s + 7t = 0$

(2) + 2·(3) ergibt:

(5) $-2s - 2t = 0$

(4)/7 + (5)/2 ergibt 0 = 0. Somit sind die Vektoren abhängig und es gibt unendlich viele Lösungen, denn die beiden Gleichung (4) und (5) sind nur Vielfache voneinander.

Sucht man weiter nach Lösungen, so folgt aus (4) bzw. (5) nur, dass $s = -t$ ist. Setzt man dies z.B. in (3) ein, ergibt sich $-r + 4t - 2t = 0$, womit $r = 2t$ ist. Für jedes t aus den reellen Zahlen gibt es somit eine Lösung. Z.B. für $t = 1$ wäre $s = -1$ und $r = 2$.

Bemerkung:
Wir hätten auch prüfen können, ob es (reelle) Zahlen s und t gibt, so dass

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

gilt. Wenn ja, dann sind die Vektoren linear abhängig. Bei dieser Art der Prüfung der linearen Abhängigkeit muss man aber aufpassen, dass die beiden Vektoren auf der rechten Seite nicht kollinear (d.h. Vielfache) sind, denn wenn diese Vielfache sind, dann sind die drei Vektoren automatisch abhängig. In diesem Fall würde man aber allgemein keine s und t finden, obwohl diese abhängig sind. Oben gilt $s = 1/2$ und $t = -1/2$.

Gauss-Algorithmus

Aufgabe 5

Löse das folgende Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus.

r	s	t	rechte Seite
-2	1	5	0
2	6	2	0
-1	-4	-2	0

Lösung:

Die rechte Seite könnte man hier auch weglassen, da sie nur aus Nullen besteht und somit ein homogenes Gleichungssystem vorliegt. Wir vertauschen nun die erste mit der dritten Zeile, wobei wir die dritte Zeile mit (-1) multiplizieren:

r	s	t
1	4	2
2	6	2
-2	1	5

Nun addiert man Vielfache der ersten Zeile zu den anderen beiden Zeilen, so dass unterhalb der ersten Zeile in der ersten Spalte Nullen stehen.

Wir addieren das (-2)-fache der ersten Zeile zur zweiten und das 2-fache der ersten Zeile zur dritten:

r	s	t
1	4	2
0	-2	-2
0	9	9

Addiert man nun das 9-fache der zweiten Zeile zum 2-fachen der dritten Zeile, so ergibt sich das folgende Tableau:

r	s	t
1	4	2
0	-2	-2
0	0	0

Da eine Zeile nur mit Nullen entstanden ist, sieht man, dass die Vektoren linear abhängig waren (das Gleichungssystem hat damit unendlich viele Lösungen). Den Gauss-Algorithmus kann man allgemein bei linearen Gleichungssystemen verwenden.

Aufgabe 6

Löse das folgende Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus.

(1) $2x - 3y + 2z = 2$

(2) $x - y + 3z = 8$

(3) $-3x + 2y + 2z = 7$

Lösung :

Wir tragen die Koeffizienten des Gleichungssystems in das Tableau ein, wobei wir die ersten beiden Zeilen vertauschen, was in diesem Fall das eliminieren von x vereinfacht (hier muss dann nur die erste Zeile vervielfacht werden und zu einer anderen addiert werden, denn vor x steht hier der Faktor 1):

x	y	z	rechte Seite
1	-1	3	8
2	-3	2	2
-3	2	2	7

Nun können wir das (-2)-fache der ersten Zeile zur zweiten Zeile und das 3-fache der ersten Zeile zur dritten Zeile addieren und erhalten unter der ersten Zeile in der Spalte für x nur Nullen:

x	y	z	rechte Seite
1	-1	3	8
0	-1	-4	-14
0	-1	11	31

Jetzt addieren wir das (-1)-fache der zweiten Zeile zur dritten, wobei wir y in der dritten Zeile eliminieren:

x	y	z	rechte Seite
1	-1	3	8
0	-1	-4	-14
0	0	15	45

Somit wäre $15z = 45$ und $z = 3$. Setzen wir $z = 3$ in die zweite Zeile des umgeformten Gleichungssystem ein, so ergibt sich $-y - 4\cdot 3 = -14$, womit $y = 2$ ist. Nun können wir die Lösungen für z und y in die ersten Zeile einsetzen und erhalten $x - 2 + 3\cdot 3 = 8$, womit $x = 1$ ist.

Somit haben wir die Lösung $\mathbb{L} = \{(1; 2; 3)\}$ gefunden.

Bemerkung:
Hätte sich als letztes Tableau

x	y	z	rechte Seite
1	-1	3	8
0	-1	-4	-14
0	0	0	45

ergeben, so gäbe es keine Lösung ($\mathbb{L} = \{\}$).

Hätte sich als letztes Tableau dagegen

x	y	z	rechte Seite
1	-1	3	8
0	-1	-4	-14
0	0	0	0

ergeben, so gäbe es unendlich viele Lösungen. Man könnte z auf einen Parameter $z = t$ setzen und dann in die zweite Zeile einsetzen: $-y - 4t = -14$. Damit wäre $y = 14 - 4t$. Dies in die erste Gleichung eingesetzt (und $z = t$) liefert $x - (14 - 4t) + 3t = 8$, somit $x = 22 - 7t$ ist und wir haben die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(22 - 7t; 14 - 4t; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ gefunden. Grafisch gesehen ist dies eine Gerade im Raum.

Aufgabe 7

Wie muss a gewählt werden, damit das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist?

(1) $2x - y = 8$

(2) $3x + ay = 4$

Lösung:

Wir übertragen das Gleichungssystem in das Tableau:

x	y	rechte Seite
2	-1	8
3	a	4

Wir addieren das (-3)-fache der ersten Zeile zum 2-fachen der zweiten Zeile und schreiben das Ergebnis in die zweite Zeile:

x	y	rechte Seite
2	-1	8
0	3+2a	-16

Damit ist $(3+2a)z = -16$. Wenn $3 + 2a \neq 0$ ist, d.h. wenn $a \neq -3/2$ ist, dann gibst es genau eine Lösung. Wenn $a = -3/2$ wäre, dann würde sich $0 = -16$ ergeben, womit wir keine Lösung hätten.