

Aufgaben zu Integralrechnung (mit etwas höherem Schwierigkeitsgrad)

Gesucht wird a:

1) a) $\int_0^a 8x^3 dx = 162$ (mit $a > 0$)

b) $\int_0^2 (ax^2 + 12) dx = 16$

2) a) Die Fläche zwischen der Kurve von $f(x) = x-1$, der x-Achse und der Gerade $x = a$ (für $a > 1$) soll 2 FE betragen. Welchen Wert hat a?

b) Die Fläche zwischen der Kurve von $f(x) = x^3 + x$, der x-Achse, der Geraden $x = a$ ($a > 0$) soll 6 FE betragen. Welchen Wert hat a?

3) Die Kurve der Funktion $f(x) = -x^3 + 4x$ schließt mit der x-Achse im 1. Quadrant eine Fläche ein. Diese soll

a) durch die Gerade $x = a$ (mit $a > 0$) halbiert werden.

b) $g(x) = ax$ (mit $0 < a < 2$) halbiert werden.

Wie muss jeweils a gewählt werden?

Lösungen:

1) a) $\int_0^a 8x^3 dx = \left[\frac{8}{4}x^4\right]_0^a = [2x^4]_0^a = 2a^4$

Damit muss $2a^4 = 162$ sein.

$$2a^4 = 162 \quad | :2$$

$$a^4 = 81 \quad | \sqrt[4]{\quad}$$

$a = 3$ (oder $a = -3$, da a aber größer 0 sein soll, gilt nur $a = 3$)

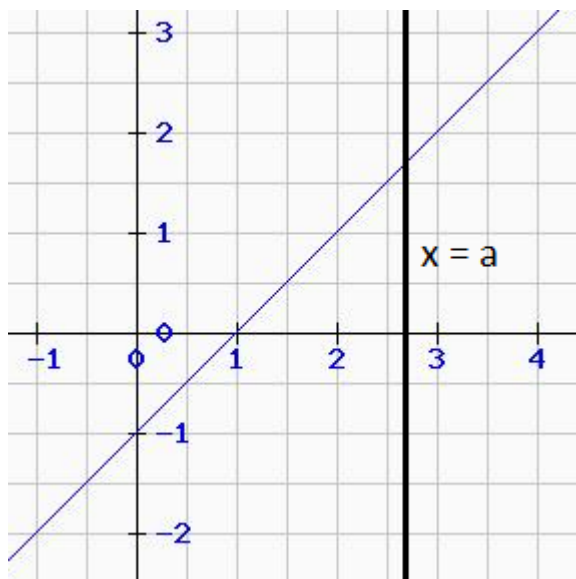
b) $\int_0^2 (ax^2 + 12) dx = \left[\frac{1}{3}ax^3 + 12x\right]_0^2 = 1/3 \cdot a \cdot 2^3 + 12 \cdot 2 - 0$

$$\frac{8}{3}a + 24 = 16 \quad | -24$$

$$\frac{8}{3}a = -8 \quad | \cdot \frac{3}{8}$$

$$a = -3$$

2) a) f hat bei $x = 1$ eine Nullstelle.



$$\int_1^a (x - 1) dx = 2$$

$$\left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^a = 2$$

$$\frac{1}{2}a^2 - a - \left(\frac{1}{2} \cdot 1^1 - 1 \right) = 2$$

$$\frac{1}{2}a^2 - a + \frac{1}{2} = 2 \quad | -2$$

$$\frac{1}{2}a^2 - a - \frac{3}{2} = 0 \quad | \cdot 2$$

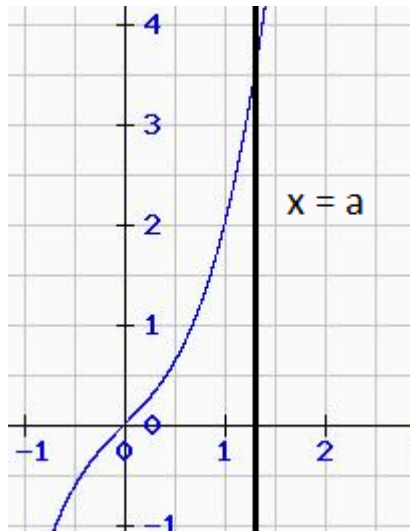
$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$a_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1 + 3}$$

$$= 1 \pm 2$$

Damit ergibt sich: $a_1 = 3$ und $a_2 = -1$. Da $a > 1$ sein soll: $a = 3$

b) $f(x) = x^3 + x$



Wo liegen die Nullstellen von f ?

$$x^3 + x = 0$$

$$x \cdot (x^2 + 1) = 0 \quad x_1 = 0$$

$x^2 = -1$ keine weiteren Nullstellen.

Die Untergrenze für die Integration ist also 0.

$$\int_0^a (x^3 + x) dx = 6$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^a = 6$$

$$\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}a^2 - 0 = 6 \quad | -6$$

$$\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}a^2 - 6 = 0 \quad | \cdot 4$$

$$a^4 + 2a^2 - 24 = 0$$

Substitution: $a^2 = z$ ($\Rightarrow a^4 = z^2$)

$$z^2 + 2z - 24 = 0$$

$$z_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1 + 24}$$

$$= -1 \pm 5$$

Also: $z_1 = 4$; $z_2 = -6$

$$a_{1/2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$a_{3/4} = \pm\sqrt{-6}$$

Somit ergeben sich zwei Lösungen, wobei nur $a = 2$ zulässig ist (denn a soll positiv sein laut Aufgabenstellung).

3) a) Nullstellen von f :

$$-x^3 + 4x = 0 \quad | : (-1)$$

$$x^3 - 4x = 0$$

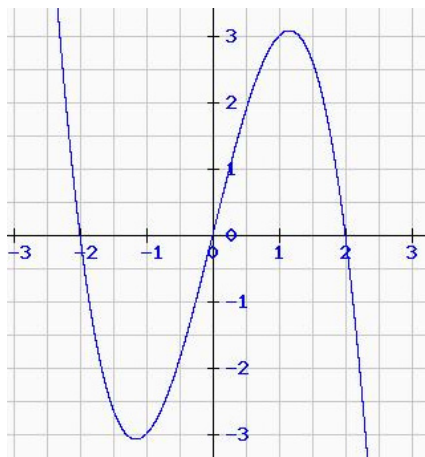
$$x \cdot (x^2 - 4) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0 \quad | +4$$

$$x = 4 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x_{2/3} = \pm 2$$



Somit ist die Untergrenze für die Integration 0 (hier beginnt auch rechts davon der 1. Quadrant). Für die Bestimmung der Gesamtfläche im 1. Quadranten (zwischen Kurve und x – Achse) benötigen wir 2 als Obergrenze.

$$\int_0^2 (-x^3 + 4x) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2\right]_0^2 = -\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^2 - 0 = -4 + 8 = 4$$

Diese Fläche soll durch $x = a$ halbiert werden:

$$\int_0^a (-x^3 + 4x) dx = \frac{4}{2}$$

$$\int_0^a (-x^3 + 4x) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2\right]_0^a = -\frac{1}{4}a^4 + 2a^2 - 0 = 2$$

$$-\frac{1}{4}a^4 + 2a^2 = 2 \quad | -2$$

$$-\frac{1}{4}a^4 + 2a^2 - 2 = 0 \quad | \cdot (-4)$$

$$a^4 - 8a^2 + 8 = 0$$

Substitution: $a^2 = z$ ($\Rightarrow a^4 = z^2$)

$$z_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 - 8}$$

$$z_{1/2} = 4 \pm \sqrt{8}$$

$$z_1 = 4 + \sqrt{8} \approx 6,828$$

$$z_2 = 4 - \sqrt{8} \approx 1,172$$

$$a_{1/2} = \pm \sqrt{z_1} \approx \pm 2,613$$

$$a_{3/4} = \pm \sqrt{z_2} \approx \pm 1,082$$

Da a zwischen 0 und 2 liegen muss, ist $a \approx 1,082$.

b) Wir benötigen den Schnittpunkt:

$$f(x) = g(x)$$

$$-x^3 + 4x = ax \quad | -ax$$

$$-x^3 + 4x - ax = 0 \quad | : (-1)$$

$$x^3 - 4x + ax = 0$$

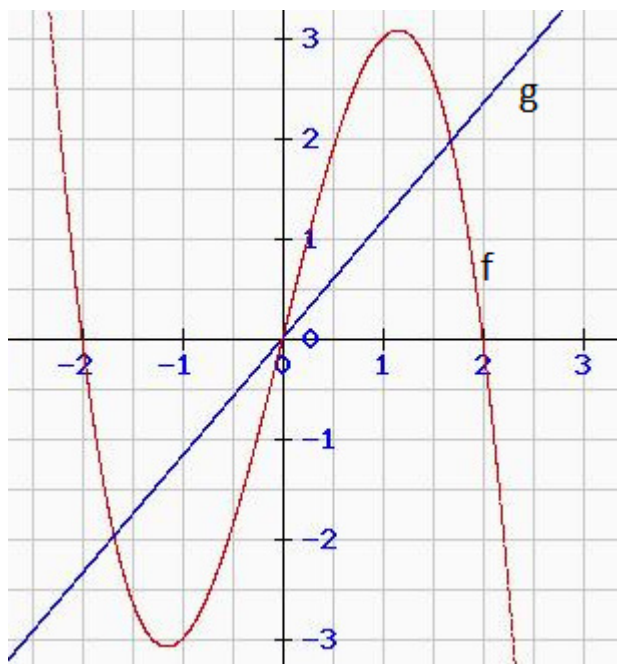
$$x \cdot (x^2 - 4 + a) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

$$x^2 - 4 + a = 0$$

$$x^2 = 4 - a \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x_{2/3} = \pm \sqrt{4 - a}$$

Da es um die Fläche im 1. Quadranten geht ist die Untergrenze für die Integration wieder gleich 0 und die Obergrenze ist $\sqrt{4 - a}$.



Da im Integrationsintervall f über g liegt, ist der Integrand $f(x) - g(x)$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{4-a}} (f(x) - g(x)) dx &= \int_0^{\sqrt{4-a}} (-x^3 + 4x - ax) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - \frac{1}{2}ax^2 \right]_0^{\sqrt{4-a}} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot (\sqrt{4-a})^4 + 2 \cdot (\sqrt{4-a})^2 - \frac{1}{2}a \cdot (\sqrt{4-a})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{4-a}} (f(x) - g(x)) dx &= -\frac{1}{4} \cdot (4-a)^2 + 2 \cdot (4-a) - \frac{1}{2} a \cdot (4-a) \\
&= -\frac{1}{4} \cdot (16 - 8a + a^2) + 8 - 2a - 2a + \frac{1}{2} a^2 \\
&= -4 + 2a - \frac{1}{4} a^2 + 8 - 4a + \frac{1}{2} a^2 \\
&= \frac{1}{4} \cdot a^2 - 2a + 4
\end{aligned}$$

Bemerkung:

Oben wurde $(\sqrt{x})^4 = x^2$ verwendet, da $\sqrt{x} = x^{1/2}$ und $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ gilt.

Somit gilt $\frac{1}{4} \cdot a^2 - 2a + 4 = 2$.

$$\frac{1}{4}a^2 - 2a + 4 = 2 \quad | -2$$

$$\frac{1}{4}a^2 - 2a + 2 = 0 \quad | \cdot 4$$

$$a^2 - 8a + 8 = 0$$

$$a_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 - 8}$$

$$= 4 \pm \sqrt{8}$$

$$a_1 \approx 6,828$$

$$a_2 \approx 1,172$$

Da a zwischen 0 und 2 liegen muss, ist $a \approx 1,172$.