

## Tipps zu Hypothesentests

Es folgen Beispiele mit Erklärungen und Tipps zur Anwendung von Hypothesentests bezüglich des Parameters  $p$  einer Binomialverteilung.

### Beispiel für linksseitigen Test:

Vermutung: Ein Würfel zeigt zu wenig Sechsen ( $H_1: p < 1/6$ ). Wenn bei 100 Würfeln nur 12 oder weniger Sechsen erscheinen, möchte sich jemand beschweren. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Person zu Unrecht beschwert?

Hier handelt es sich um einen Hypothesentest mit den folgenden Hypothesen (und daneben die jeweiligen Annahmebereiche):

$H_0: p = \frac{1}{6}$       Annahmebereich von  $H_0: \{13, \dots, 100\}$       ( $H_0$  könnte auch  $p \geq \frac{1}{6}$  lauten.)

$H_1: p < \frac{1}{6}$       Annahmebereich von  $H_1: \{0, \dots, 12\}$  (Dies ist auch der Ablehnungsbereich von  $H_0$ .)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich eine Person bei dieser Entscheidungsregel beschwert, obwohl der Würfel OK ist? Das wäre die Wahrscheinlichkeit, dass mit einem Würfel, bei dem alles OK ist (also  $p = 1/6$  ist), die Anzahl der Sechsen höchstens 12 beträgt, wenn 100-mal gewürfelt wird. Diese Wahrscheinlichkeit kann in einer Tabelle der kumulierten Binomialverteilung abgelesen (mit  $n = 100$  und  $p = 1/6$ ) oder der entsprechende Menüpunkt des Taschenrechners für die kumulierte Binomialverteilung verwendet werden. Alternativ kann diese auch mit der Eingabe der unten zu sehenden Summe in den Taschenrechner berechnet werden.

Die Fehlerwahrscheinlichkeit dafür, dass  $H_0$  verworfen bzw.  $H_1$  angenommen wird, obwohl  $H_0$  richtig ist, wird mit  $\alpha$  bezeichnet und ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art.

$$\alpha = P(\text{"H}_0 \text{ wird verworfen, obwohl H}_0 \text{ richtig ist"}) = P(X \leq 12 \mid p = 1/6) \approx 0,1297$$

Taschenrechner:  $\sum_{x=0}^{12} \binom{100}{x} \cdot (1/6)^x \cdot (5/6)^{100-x}$  und für  $\binom{100}{x}$  wird  $100 nCr x$  eingeben.

Tabelle ( $n = 100$ ,  $p = 1/6$ , <http://alles-mathe.de/Binomial-Tabelle/Binomialverteilung-Tab.html>):

k	$P(X \leq k)$
10	0.042696
11	0.077719
12	0.129671
13	0.200005
14	0.287421

Wie muss die Entscheidungsregel geändert werden, wenn diese Fehlerwahrscheinlichkeit maximal 5% betragen soll? Oft wird hier von  $\alpha = 5\%$  gesprochen. Bei dieser Fragestellung ist  $\alpha$  dann aber eine Obergrenze für die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art, da die Binomialverteilung keine stetige Verteilung ist und dieses  $\alpha$  wird auch als Signifikanzniveau bezeichnet.

Bei dieser Fragestellung ist der Annahmebereich  $\{0, 1, \dots, k\}$  von  $H_1$  bzw. die Obergrenze  $k$  dieses Bereichs unbekannt. Nun kann aus der Tabelle der Binomialverteilung mit  $n = 100$  und  $p = 1/6$  das

größte  $k$  abgelesen werden, so dass gerade noch  $P(X \leq k) \leq 0,05$  gilt. Es ergibt sich  $k = 10$ , siehe Tabelle oben. Statt einer Tabelle kann auch die Funktion des Taschenrechners zur Berechnung der (kumulierten) Binomialverteilung verwendet werden.

Wir könnten auch durch Probieren mit dem Taschenrechner das größte  $k$  suchen, für das gerade noch die Bedingung  $P(X \leq k) = \sum_{x=0}^k \binom{100}{x} \cdot (1/6)^x \cdot (5/6)^{100-x} \leq 0,05$  erfüllt ist.

**Bemerkung:**

Ist ein alternatives  $p$  bekannt, z.B. falls vermutet wird, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs nur  $1/10$  beträgt, dann kann auch die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art, als für  $\beta$ , berechnet werden. Alle Berechnung von oben bezüglich  $\alpha$  würde aber analog durchgeführt werden.

$$H_0: p = \frac{1}{6} \quad \text{Annahmebereich von } H_0: \{11, \dots, 100\}$$

$$H_1: p = \frac{1}{10} \quad \text{Annahmebereich von } H_1: \{0, \dots, 10\}$$

$$\beta = P(\text{"}H_0 \text{ wird beibehalten, obwohl } H_1 \text{ richtig ist"}) = P(X \geq 11 \mid p = 1/10)$$

D.h., bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  wird  $p$  von  $H_0$  verwendet und für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit  $\beta$  das  $p$  von  $H_1$  (was dann nur bei einem gegebenen alternativen  $p$ , wie oben, möglich ist).

Es gilt (mit  $n = 100$  und  $p = 1/10$ ):

$$\beta = P(X \geq 11) = 1 - P(X \leq 10) \approx 1 - 0,5832 = 0,4168$$

Schulbücher verwenden für die Wahrscheinlichkeit  $P(X \leq 10)$  bei  $n = 100$  und  $p = 1/10$  auch die Schreibweise  $F(100; 0,1; 10)$ . Der Wert  $0,5832$  kann aus der Tabelle der (kumulierten) Binomialverteilung für  $n = 100$  und  $p = 1/10$  (bei  $k = 10$ ) abgelesen werden oder es wird der entsprechende Menüpunkt des Taschenrechners verwendet. Es kann aber auch wieder folgende Summe in den Taschenrechner eingegeben werden:

$$P(X \geq 11) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \sum_{x=0}^{10} \binom{100}{x} \cdot (1/10)^x \cdot (9/10)^{100-x}$$

Falls der Taschenrechner leistungsfähig ist, kann auch

$$P(X \geq 11) = \sum_{x=11}^{100} \binom{100}{x} \cdot (1/10)^x \cdot (9/10)^{100-x}$$

direkt berechnet werden.

Tabelle ( $n = 100$ ,  $p = 1/10$ ):

k	$P(X \leq k)$
8	0.320874
9	0.45129
10	0.583156
11	0.703033
12	0.801821

**Beispiel für rechtsseitigen Test:**

100 Personen erhalten ein Medikament. Eine Nebenwirkung soll mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% auftreten. Vermutung: Diese Wahrscheinlichkeit liegt über 20%. Entscheidungsregel: Wenn mindestens 25 Nebenwirkungen auftreten, wird davon ausgegangen, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Nebenwirkung über 20% liegt. Wie groß ist die Fehlerwahrscheinlichkeit  $\alpha$ , wenn nach dieser Entscheidungsregel  $H_1$  gewählt wird?

$H_0: p = 0,2$  Annahmebereich von  $H_0: \{0, \dots, 24\}$

$H_1: p > 0,2$  Annahmebereich von  $H_1: \{25, \dots, 100\}$

↖ Ab 25 Nebenwirkungen wird  $H_1$  angenommen

$$\begin{aligned}\alpha &= P(X \geq 25) \quad (X \text{ ist unter } H_0 \text{ binomialverteilt mit } n = 100 \text{ und } p = 0,2) \\ &= 1 - P(X \leq 24) \\ &\approx 1 - 0,8686 \\ &\approx 0,1314 = 13,14\%\end{aligned}$$

Tabelle ( $n = 100, p = 0,2$ ):

k	$P(X \leq k)$
23	0.810913
24	0.868647
25	0.912525
26	0.944167
27	0.965848
28	0.979980

Mit Taschenrechner kann

$$1 - \sum_{x=0}^{24} \binom{100}{x} \cdot 0,2^x \cdot 0,8^{100-x}$$

eingegeben werden, oder

$$\sum_{x=25}^{100} \binom{100}{x} \cdot 0,2^x \cdot 0,8^{100-x}$$

wenn der Taschenrechner leistungsfähig genug ist.

Wie muss die Regel geändert werden, wenn die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art maximal 5% (oder kurz wenn das Signifikanzniveau 5%) betragen soll?

Annahmebereich  $H_1: \{k, \dots, 100\}$

Hier muss das kleinste  $k$  bestimmt werden, so dass  $P(X \geq k) \leq 0,05$  (mit  $p = 0,2$  und  $n = 100$ ) gilt.

Für die Verwendung der kumulierten Tabelle stellen wir um:

$$P(X \geq k) \leq 0,05$$

$$1 - P(X \leq k - 1) \leq 0,05 \quad | \quad -0,05 + P(X \leq k - 1)$$

$$0,95 \leq P(X \leq k - 1)$$

Hier muss nun das kleinste  $k - 1$  in der Tabelle abgelesen werden, so dass die Bedingung erfüllt ist. Also ist  $k - 1 = 27$  und somit  $k = 28$ . Damit gilt  $P(X \geq 28) = 1 - P(X \leq 27) \approx 1 - 0,9658 = 0,0342 \leq 5\%$ . Hierzu kann man gedanklich alle  $k$  in der Tabellenüberschrift durch  $k - 1$  ersetzen (wir wollten hier den Formalismus gering halten, sonst hätten wir für  $k$  nochmals eine andere Bezeichnung oder einen Index bei  $k$  wie  $k_0$  verwenden können).

Mit dem Taschenrechner müssten verschiedene  $k$  testweise eingesetzt und das kleinste  $k$  gefunden werden, für dass

$$P(X \geq k) = \sum_{x=k}^{100} \binom{100}{x} \cdot 0,2^x \cdot 0,8^{100-x} \leq 0,05$$

gilt oder:

$$P(X \leq k - 1) = \sum_{x=0}^{k-1} \binom{100}{x} \cdot 0,2^x \cdot 0,8^{100-x} \geq 0,95 = 1 - 0,05$$

Mit  $k = 28$  würde man erst ab 28 Nebenwirkungen behaupten, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Nebenwirkung über 20% liegt und dabei mit einer Wahrscheinlichkeit von maximal 5% falsch liegen. D.h. in maximal 5% der Fälle könnte dann die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Nebenwirkung doch nur 20% betragen, wenn man sich nach dieser Regel für  $H_1$  entschieden hat.

Würde alternativ vermutet werden, dass  $p = 0,3$  gilt, kann auch ein Alternativtest durchgeführt werden, wobei wieder alle Berechnungen bezüglich  $\alpha$  analog erfolgen.

$H_0: p = 0,2$  Annahmebereich von  $H_0: \{0, \dots, 27\}$

$H_1: p = 0,3$  Annahmebereich von  $H_1: \{28, \dots, 100\}$

Hier könnte dann auch wieder

$$\beta = P(\text{"H}_0 \text{ wird beibehalten, obwohl H}_1 \text{ richtig ist"}) = P(X \leq 27 \mid p = 0,3)$$

berechnet bzw. abgelesen werden, also die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art ("H<sub>0</sub> wird beibehalten, obwohl H<sub>1</sub> richtig ist" bzw. "Entscheidung für H<sub>0</sub>, obwohl H<sub>1</sub> richtig ist").

### Bemerkungen:

1) Die Tabelle mit den Wahrscheinlichkeiten  $P(X \leq k)$  ist die kumulierte Tabelle und sollte nicht mit der Tabelle für  $P(X = k)$  verwechselt werden.

2) Wenn über die Summe ein  $k$  gesucht wird, dann kann man bei einem rechtsseitigen Test mit einem  $k$  über dem Erwartungswert  $\mu = n \cdot p$  und bei einem linksseitigen Test mit einem unter  $\mu$  beginnen. Mit der Standardabweichung  $\sigma$  könnten wir die Lage über eine  $\sigma$ -Umgebung noch genauer abschätzen.

3) Um explizit zu verdeutlichen, dass ein anderes  $p$  zu verwenden ist, wurde oben für die Wahrscheinlichkeit  $P(X \leq k)$  auch die Schreibweise  $P(X \leq k \mid p = \dots)$  verwendet.