

Lineare Funktionen und Exponentialfunktionen

1) Die folgenden Wertetabellen gehören zu linearen Funktionen oder zu Exponentialfunktionen. Welche Wertetabelle gehört zu einer linearen Funktion und welche zu einer Exponentialfunktion?

a)

| | | | |
|------|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 |
| f(x) | 4 | 6 | 8 |

b)

| | | | |
|------|---|---|----|
| x | 0 | 1 | 2 |
| f(x) | 4 | 8 | 16 |

c)

| | | | |
|------|------|------|--------|
| x | 0 | 1 | 2 |
| f(x) | 1620 | 1296 | 1036,8 |

d)

| | | | |
|------|------|------|-----|
| x | 0 | 1 | 2 |
| f(x) | 1450 | 1200 | 950 |

Wie lauten die Funktionsgleichungen?

2) Es sei $f(x) = b \cdot a^x$ bzw. $y = b \cdot a^x$ die Gleichung der Exponentialfunktion. a ist dabei der Wachstumsfaktor (für $a > 1$) oder Zerfallsfaktor (für $a < 1$ und natürlich $a > 0$) und b der Anfangswert (da $f(0) = b$). Bei Wachstums- oder Zerfallsprozessen kann über den Prozentsatz p der Wachstumsfaktor über $a = 1 + p/100$ bzw. der Zerfallsfaktor über $a = 1 - p/100$ berechnet werden.

Bestimme a für die folgenden Anwendungen:

- Es gibt eine monatliche Steigerung von 25%.
- Es gibt jährlich einen Wertverlust von 50%.
- Der jährliche Zuwachs beträgt 14%.
- Pro Woche fällt der Kurs um 1,2%.

3) a) $a = 0,92$. Wie groß ist der monatliche Verlust in Prozent?

b) $a = 0,354$. Wie groß ist der monatliche Verlust in Prozent?

c) $a = 1,04$. Wie groß ist die monatliche Zunahme in Prozent?

d) $a = 1,385$. Wie groß ist die monatliche Zunahme in Prozent?

e) $a = 2,55$. Wie groß ist die monatliche Zunahme in Prozent?

4) Es werden 5000€ zu 2,5% Zinsen angelegt.

a) Gesucht wird die Gleichung $f(x) = b \cdot a^x$ (x = Zeit in Jahren, $f(x)$ = Kontostand in € nach x Jahren)?

b) Wie hoch wäre der Kontostand nach 4 Jahren bei dieser Anlagen?

5) Eine Maschine kostet 40.000€. Sie verliert pro Jahr 10% an Wert.

a) Gesucht wird die Gleichung $f(x) = b \cdot a^x$ (x = Zeit in Jahren, $f(x)$ = Restwert in € nach x Jahren)?

b) Wie viel ist die Maschine in 5 Jahren wert?

c) Nach wie vielen Jahren ist sie weniger als 20.000€ wert?

6) $f(x) = 2000 \cdot 1,05^x$

Wie könnte eine Aufgabe lauten, die zu dieser Gleichung führt?

Lösungen:

1) Wenn die Differenzen von zwei aufeinanderfolgenden y-Werten (Funktionswerten) immer gleich sind (vorausgesetzt, die Differenzen der x-Werte sind immer gleich), dann handelt es sich um eine lineare Funktion. Wenn die Quotienten von zwei aufeinanderfolgenden y-Werten immer gleich sind (vorausgesetzt, die Differenzen der x-Werte sind immer gleich, z.B. jeweils gleich 1, wie im Beispiel), dann handelt es sich um eine Exponentialfunktion.

a)

| | | | |
|------|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 |
| f(x) | 4 | 6 | 8 |

Es gilt für die Differenzen der y-Werte: $6 - 4 = 2$ und $8 - 6 = 2$. Es handelt sich um eine lineare Funktion und da die x-Werte jeweils um 1 ansteigen, ist auch die Steigung der Funktion $m = 2$, also gleich der Differenz der y-Werte. Wenn die Differenz der x-Werte z.B. jeweils gleich 5 gewesen wären, hätten wir die 2 noch durch 5 teilen müssen, um die Steigung m zu erhalten (allgemein: $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$). Die Steigung gibt an, um welchen Wert y ansteigt oder fällt, wenn x um 1 ansteigt. Der y-Achsenabschnitt ist 4, denn $f(0) = 4$ (siehe Tabelle).

b)

| | | | |
|------|---|---|----|
| x | 0 | 1 | 2 |
| f(x) | 4 | 8 | 16 |

$8 - 4 = 4$ und $16 - 8 = 8$, also nicht linear. Wir bestimmen die Quotienten: $8/4 = 2$ und $16/8 = 2$, also liegt exponentielles Wachstum vor. Da oben x jeweils um 1 ansteigt, haben wir über den Quotienten direkt den Wachstumsfaktor bestimmt: $a = 2$. Es gilt: $a = f(x+1)/f(x)$. Wenn x jeweils um z.B. 5 angestiegen wäre, hätten wir die 5. Wurzel aus dem Quotienten ziehen müssen, um a zu erhalten.

Damit kennen wir den Wachstumsfaktor $a = 2$. Es gilt $b = 4$, denn $f(0) = 4$: $f(x) = b \cdot a^x = 4 \cdot 2^x$

c)

| | | | |
|------|------|------|--------|
| x | 0 | 1 | 2 |
| f(x) | 1620 | 1296 | 1036,8 |

An den y-Werten fällt gleich auf, dass die Differenzen nicht konstant sein können. Damit handelt es sich hier um eine Exponentialfunktion bzw. um exponentiellen Zerfall (da die Funktionswerte fallen):

$$a = 1296/1620 = 1036,8/1296 = 0,8. f(x) = 1620 \cdot 0,8^x.$$

d)

| | | | |
|------|------|------|-----|
| x | 0 | 1 | 2 |
| f(x) | 1450 | 1200 | 950 |

$1200 - 1450 = -250$ und $950 - 1200 = -250$. Also eine lineare Funktion. $f(x) = -250x + 1450$.

Wie allgemein über zwei Punkte eine Geradengleichung bestimmt werden kann, sieht man unter <http://mathe-total.de/Analysis-Aufgaben/Untersuchung-linearer-Funktionen.pdf> in der Lösung zur Aufgabe 2 und unter <http://mathe-total.de/Mittelstufe-Aufgaben/Exponentialfunktionen.pdf> ist in der Lösung zur Aufgabe 1 (oder noch allgemeiner in der zur Aufgabe 2) zu sehen, wie über zwei Punkte die Gleichung einer Exponentialfunktion bestimmt werden kann.

2)

- a) Es gibt eine monatliche Steigerung von 25%: $a = 1 + p/100 = 1 + 25/100 = 1,25$
- b) Es gibt jährlich einen Wertverlust von 50%: $a = 1 - p/100 = 1 - 50/100 = 0,5$
- c) Der jährliche Zuwachs beträgt 14%: $a = 1 + p/100 = 1 + 14/100 = 1,14$
- d) Pro Woche fällt der Kurs um 1,2%: $a = 1 - p/100 = 1 - 1,2/100 = 0,988$

3) a) $a = 0,92$. $a < 1$, also Zerfall.

$a = 1 - p/100$, damit wäre $p = 100 \cdot (1-a) = 100 \cdot (1-0,92) = 8$, also 8% Verlust pro Monat.

Man hätte auch die Gleichung $a = 1 - p/100$ bzw. $0,92 = 1 - p/100$ nach p auflösen können:

$$\begin{array}{rcl} 0,92 = 1 - p/100 & | -1 & \\ -0,08 = -p/100 & | \cdot 100 & \\ -8 = -p & | :(-1) & \\ p = 8 & & \end{array}$$

b) $a = 0,354$. $a < 1$, also Zerfall. $p = 100 \cdot (1-a) = 100 \cdot (1-0,354) = 64,6$, also 64,6% Verlust pro Monat.

c) $a = 1,04$. $a > 1$, also Wachstum. $p = 100 \cdot (a-1) = 100 \cdot (1,04-1) = 4$, also 4% Wachstum pro Monat.

d) $a = 1,385$. Wachstum. $p = 100 \cdot (a-1) = 100 \cdot (1,385-1) = 38,5$, also 38,5% Wachstum pro Monat.

e) $a = 2,55$. Wachstum. $p = 100 \cdot (a-1) = 100 \cdot (2,55-1) = 155$, also 155% Wachstum pro Monat.

4) Es werden 5000€ zu 2,5% Zinsen angelegt.

a) $f(x) = b \cdot a^x$. $a = 1 + p/100 = 1,025$ ($p = 2,5$). Anfangswert $b = 5000$ (ohne Einheit). $f(x) = 5000 \cdot 1,025^x$

b) Kontostand nach 4 Jahren: $f(4) = 5000 \cdot 1,025^4 \approx 5519,06$, also ca. 5.519,06€.

5) Eine Maschine kostet 40.000€. Sie verliert pro Jahr 10% an Wert.

a) $f(x) = b \cdot a^x$. $a = 1 - p/100 = 0,9$ ($p = 10$). Anfangswert $b = 40000$ (ohne Einheit). $f(x) = 40000 \cdot 0,9^x$

b) Die Maschine hat in 5 Jahren folgenden Wert: $f(5) = 40000 \cdot 0,9^5 = 23619,6$, also 23.619,60€.

c) Nach wie viel Jahren ist sie weniger als 20.000€ wert?

Wenn noch kein Logarithmus besprochen wurde und nur nach ganzzahligen Jahren gefragt wird, dann kann man diese Aufgabe über das Berechnen von Funktionswerten lösen. Aus 5b) wissen wir, dass nach 5 Jahren noch ein Wert von 23.619,60€ vorhanden war.

Also müssen es mehr als 5 Jahre sein:

$$f(6) = 40000 \cdot 0,9^6 = 21257,64$$

$$f(7) = 40000 \cdot 0,9^7 = 19131,876$$

Damit muss man über 6 Jahre warten, damit der Wert auf unter 20.000€ fällt.

Mit dem Logarithmus:

$$40000 \cdot 0,9^x = 20000$$

Wir lösen diese mit dem ‚=‘-Zeichen, könnten aber auch das ‚<‘-Zeichen verwenden.

$$\begin{array}{l} 40000 \cdot 0,9^x = 20000 \quad | : 40000 \\ 0,9^x = 0,5 \quad | \log_{0,9}() \\ x = \log_{0,9}(0,5) \approx 6,58 \end{array}$$

Also nach ca. 6,58 Jahren ist die Maschine noch 20.000 € wert, und nach mehr als ca. 6,58 Jahren ist sie dann weniger als 20.000 € wert.

$$6) f(x) = 2000 \cdot 1,05^x$$

Wie könnte eine Aufgabe lauten, die zu dieser Gleichung führt?

Beispielsweise: Es werden 2000€ zu 5% Zinsen pro Jahr angelegt. Wie lautet die Gleichung, die dem Jahr x den Wert zum Zeitpunkt x in € zuordnet? Einfacher: Wie lautet die Gleichung, so dass f(x) den Kontostand nach x Jahren in € darstellt?