

## Logarithmen

Mit einem Logarithmus kann man Gleichungen der Form

$$b = a^x$$

lösen (mit  $a > 0$  und  $b > 0$ ). Zu einem Logarithmus gehört immer eine Basis.  $\log_a(x)$  ist der Logarithmus von  $x$  zur Basis  $a$  und ist die Umkehrfunktion von  $a^x$ . Damit gilt  $\log_a(a^x) = x$ . Nun kann man die obige Gleichung durch Anwendung des  $\log_a$  auf beide Seiten lösen:

$$b = a^x \quad | \log_a$$

$$x = \log_a(b)$$

Damit wäre  $\log_{10}(1000)$  die Lösung der Gleichung  $10^x = 1000$ . Es gilt somit  $\log_{10}(1000) = 3$ .

Weiterhin gilt:

$$\log_a(a) = 1 \text{ und } \log_a(1) = 0 \text{ (da } a^0 = 1\text{)}.$$

### Aufgaben:

$$\log_2(4), \log_3(27), \log_2(\sqrt{2}), \log_{10}(0,001), \log_5(1/25), \log_{10}(1000000), \log_3(1/\sqrt{3})$$

### Lösungen:

$$\log_2(4) = \log_2(2^2) = 2, \log_3(27) = \log_3(3^3) = 3, \log_2(\sqrt{2}) = \log_2(2^{1/2}) = 1/2,$$

$$\log_{10}(0,001) = \log_{10}(10^{-3}) = -3, \log_5(1/25) = \log_5(1/5^2) = \log_5(5^{-2}) = -2,$$

$$\log_{10}(1000000) = 6, \log_3(1/\sqrt{3}) = \log_3(3^{-1/2}) = -1/2$$

Zu den bekanntesten Logarithmen zählen  $\lg(x) = \log_{10}(x)$  und  $\ln(x) = \log_e(x)$ , wobei  $e$  die Euler'sche Zahl ist.

Es gelten folgende Gesetz (die sich von den Potenzgesetzen ableiten lassen):

$$(1) \log_a(c^x) = x \cdot \log_a(c)$$

$$(2) \log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$(3) \log_a(b/c) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

$$\text{Aus (3) folgt: } \log_a(1/c) = \log_a(1) - \log_a(c) = -\log_a(c).$$

Mit dem Gesetz (1) könnte man die Gleichung  $5^x = 28$  auch ohne den Logarithmus zur Basis 5 lösen und einen beliebigen Logarithmus verwenden:

$$\begin{aligned} 5^x &= 28 \quad | \lg \\ x \cdot \lg(5) &= \lg(28) \quad | : \lg(5) \\ x &= \lg(28)/\lg(5) \approx 2,070 \end{aligned}$$

Damit wäre  $\log_5(28)$  das gleiche wie  $\lg(28)/\lg(5)$  oder wie  $\ln(28)/\ln(5)$ .

### Aufgaben:

$$\log_a(10a), \log_a(a \cdot b^3), \log_a(c^4/d^3), \log_a(\sqrt{a^5}), \log_a\left(\frac{b^3 c^4}{d^5}\right), \lg\left(\frac{10000a^5}{b^3 \sqrt{c}}\right)$$

### Lösungen:

$$\log_a(10a) = \log_a(10) + \log_a(a) = \log_a(10) + 1$$

$$\log_a(a \cdot b^3) = \log_a(a) + \log_a(b^3) = 1 + 3 \cdot \log_a(b)$$

$$\log_a(c^4/d^3) = \log_a(c^4) - \log_a(d^3) = 4 \cdot \log_a(c) - 3 \cdot \log_a(d)$$

$$\log_a(\sqrt{a^5}) = \log_a(a^{5/2}) = 5/2$$

$$\begin{aligned} \log_a\left(\frac{b^3 c^4}{d^5}\right) &= \log_a(b^3 \cdot c^4) - \log_a(d^5) = \log_a(b^3) + \log_a(c^4) - \log_a(d^5) \\ &= 3 \cdot \log_a(b) + 4 \cdot \log_a(c) - 5 \cdot \log_a(d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg\left(\frac{10000a^5}{b^3 \sqrt{c}}\right) &= \lg(10000a^5) - \lg(b^3 \cdot c^{1/2}) = \lg(10000) + \lg(a^5) - (\lg(b^3) + \lg(c^{1/2})) \\ &= 4 + 5 \cdot \lg(a) - 3 \cdot \lg(b) - 1/2 \cdot \lg(c) \end{aligned}$$

### Aufgaben:

Gesucht ist die Lösung der Gleichung:

a)  $8^x = 20$

b)  $5^{x+1} = 125$

c)  $2 \cdot 3^x = 28$

d)  $5 \cdot 3^x = 4^{x-2}$

e)  $4^{2x+1} = 64$

f)  $\log_2(x+5) = 3$

**Lösungen:**

$$\text{a) } 8^x = 20 \quad | \log_8$$

$$x = \log_8(20) \approx 1,441$$

Falls der Taschenrechner nur eine lg-Taste besitzt:

$$8^x = 20 \quad | \lg$$

$$x \cdot \lg(8) = \lg(20) \quad | : \lg(8)$$

$$x = \lg(20) / \lg(8)$$

$$\text{b) } 5^{x+1} = 125 \quad | \log_5$$

$$x+1 = 3 \quad | -1$$

$$x = 2$$

$$\text{c) } 2 \cdot 3^x = 28 \quad | :2$$

$$3^x = 14 \quad | \log_3$$

$$x = \log_3(14) \approx 2,402$$

$$\text{d) } 5 \cdot 3^x = 4^{x+1} \quad | \log_4$$

$$\log_4(5) + x \cdot \log_4(3) = x + 1$$

Nun sollte man alle „Terme mit x“ auf eine Seite bringen und die Zahlen („ohne x“) auf die andere Seite:

$$\log_4(5) + x \cdot \log_4(3) = x + 1 \quad | -x - \log_4(5)$$

$$x \cdot \log_4(3) - x = 1 - \log_4(5)$$

Nun x ausklammern:

$$x \cdot (\log_4(3) - 1) = 1 - \log_4(5) \quad | : (\log_4(3) - 1)$$

$$x = (1 - \log_4(5)) / (\log_4(3) - 1)$$

$$x \approx 0,7757$$

e)  $4^{2x+1} = 64$

Lösung:  $x = 1$  (klar, da  $64 = 4^3$  ist, muss  $2x+1 = 3$  sein)

f)  $\log_2(x+5) = 3$

Da  $a^{\log_a(x)} = x$  gilt, kann man auf beide Seiten die Funktion  $f(x) = 2^x$  anwenden und erhält

$$x + 5 = 2^3 ,$$

womit die Lösung  $x = 3$  lautet.