4 Potenzgesetze

Die Variablen n und m stehen in der Regel für natürliche Zahlen (m, n ϵ ℕ). Die folgenden Potenzgesetze (P1) bis (P4) gelten auch für rationale und sogar reelle Exponenten, wobei in der allgemeinen Formulierung a > 0 und b > 0 vorausgesetzt wird, falls beispielsweise n = -1/2 wäre. Für natürliche n und m benötigen wir keine Einschränkung, außer dass bei (P2) a ≠ 0 gelten muss, da hier a im Nenner steht und b ≠ 0 bei der zweiten Variante von (P3).

$$\text{(P1)}\ a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Beispiele:
$a^3 \cdot a^7 = a^{10}$

Dies ist ganz offensichtlich, denn $a^3 \cdot a^7 = a \cdot a \cdot a \ \cdot\ a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{10}$.

$x^3 \cdot y^4 \cdot x^2 \cdot y^5 = x^5 \cdot y^9$

$4x^8(-2)x^3 = -8x^{11}$

$$\text{(P2)}\ \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (a \neq 0)$$

Beispiele:
$\frac{a^8}{a^2} = a^6$ (Wenn das Potenzgesetzt unbekannt wäre, könnte $a^2 = a \cdot a$ herausgekürzt werden.)

$\frac{a^3}{a^{-2}} = a^{3-(-2)} = a^{3+2} = a^5$

$\frac{a^{10} \cdot b^8}{a^4 \cdot b^2} = a^6 \cdot b^6$

$\frac{12x^5 \cdot y^3}{6x^2 \cdot y^5} = 2x^3 \cdot y^{-2}$ (oder auch $\frac{2x^3}{y^2}$)

Bemerkung:
Für a ≠ 0 folgt aus (P2):

I) $\frac{a^m}{a^m} = a^0 = 1$, also $a^0 = 1$.

II) $\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{-n}$, also $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$. Es gilt auch: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Somit ist $\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$.

$$\text{(P3)}\quad (a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n \qquad \text{bzw.} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad (\text{mit } b \neq 0)$$

Beispiele:
$(x\cdot y)^3 = x^3\cdot y^3$

$0{,}25^4 \cdot 8^4 = (0{,}25 \cdot 8)^4 = 2^4 = 16$

$16^3/8^3 = (16/8)^3 = 2^3 = 8$

$$\text{(P4)}\quad (a^n)^m = a^{n\cdot m}$$

Beispiele:
$\left(a^3\right)^4 = a^{3\cdot 4} = a^{12}$

$\left(x^{k-1}\right)^{k+1} = x^{(k-1)(k+1)} = x^{k^2-1}$

Für die beiden Potenzgesetze (P3) und (P4):

$(a^3b^4)^3 = (a^3)^3 \cdot (b^4)^3 = a^9b^{12}$

$(4x^5)^2 = 4^2 \cdot (x^5)^2 = 16x^{10}$

Aufgaben:
1) Folgende Terme sollen zusammengefasst bzw. vereinfacht werden:

a) $x^5\cdot x^3$

b) $2y^8 5x^3 y^{10}$

c) $\dfrac{x^8}{x^5}$

d) $\dfrac{x^3y^{10}}{x^{-2}y^5}$

e) $\dfrac{12x^8y^7}{3x^4y^{12}}$

f) $\dfrac{12(x+y)^8}{4(x+y)^2}$

g) $a^{2n+3m} \cdot a^{-4n+2m}$

2) Es sollen die Potenzgesetze angewendet werden:

a) $(2a)^4$

b) $(x^8y^3)^4$

c) $(-0{,}5)^6 \cdot 2^6$

d) $\left(\frac{2}{a^2}\right)^4$

e) $(a \cdot b^4)^{-2}$

3) Es soll in wissenschaftlicher Schreibweise geschrieben werden:

Beispiele:
$12345 = 1{,}2345 \cdot 10000 = 1{,}2345 \cdot 10^4$
$0{,}00013 = 1{,}3 / 10000 = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$

a) 12500

b) 0,00000125

c) -830000

d) 0,00000004

Lösungen:
1)
a) x^8

b) $10x^3y^{18}$

c) x^3

d) x^5y^5

e) $4x^4y^{-5}$

f) $3(x+y)^6$ Achtung: $(x+y)^6$ ist allgemein nicht dasselbe wie $x^6 + y^6$!

g) a^{-2n+5m}

2)
a) $16a^4$

b) $x^{32}y^{12}$

c) $(-1)^6 = 1$

d) $\frac{16}{a^8} = 16a^{-8}$

e) $a^{-2} \cdot b^{-8}$

3)
a) $1{,}25 \cdot 10^4$

b) $1{,}25 \cdot 10^{-6}$

c) $-8{,}3 \cdot 10^5$

d) $4 \cdot 10^{-8}$

Weitere Aufgaben:
https://mathe-total.de/new-MS/Potenzgesetze2.pdf

Bemerkungen:
1) Die zweite Variante bei (P3), d.h. $(a/b)^n = a^n/b^n$, ergibt sich aus der ersten Variante, d.h. aus $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, denn wenn wir a = x und b = 1/y in $(a \cdot b)^n$ einsetzen, erhalten wir

$$(x \cdot 1/y)^n = x^n \cdot (1/y)^n = x^n \cdot 1/y^n = x^n/y^n$$

wobei $(x \cdot 1/y)^n = (x/y)^n$ gilt und damit $(x/y)^n = x^n/y^n$ oder $(a/b)^n = a^n/b^n$, die Variablen sind egal.

Oben wurde $(1/y)^n = 1/y \cdot 1/y \cdot \ldots \cdot 1/y = 1/y^n$ verwendet, wobei der Faktor 1/y im Produkt $1/y \cdot 1/y \cdot \ldots \cdot 1/y$ insgesamt n-mal vorkommt.

2) Die Wurzelgesetze lassen sich auch aus den Potenzgesetzen herleiten.

3) Im Kapitel Wurzeln war der sogenannte Wurzelexponent gleich 2 und wir schrieben, wie üblich, kurz $\sqrt{a}$ für $\sqrt[2]{a}$. Der Wurzelexponent sollte nicht mit dem Exponenten n bei a^n verwechselt werden. $\sqrt[n]{a}$ ist die n-te Wurzel (**Wurzelexponent** = n) aus einer Zahl a, wobei für gerade n der Radikand a nicht negativ sein darf. Es gilt z. B.:

$\sqrt[3]{8} = 2$, denn $2^3 = 8$, $\sqrt[5]{32} = 2$, denn $2^5 = 32$ oder $\sqrt[4]{10000} = 10$, denn $10^4 = 10000$.

Bei ungeraden Wurzelexponenten n kann die Wurzel sogar aus negativen Zahlen gezogen werden und es gilt z.B. $\sqrt[3]{-8} = -2$, da $(-2)^3 = -8$. Die Gleichung $x^3 = -8$ hat nur die eine Lösung x = -2. Die Gleichung $x^4 = 256$ hat zwei Lösungen, eine ist x = 4 und die andere ist x = -4, wofür auch später kurz $x_{1/2} = \pm 4$ geschrieben wird. Darauf kommen wir im nächsten Kapitel zurück. Die 4. Wurzel aus 256 ist aber wieder nur 4, d.h. $\sqrt[4]{256} = 4$.