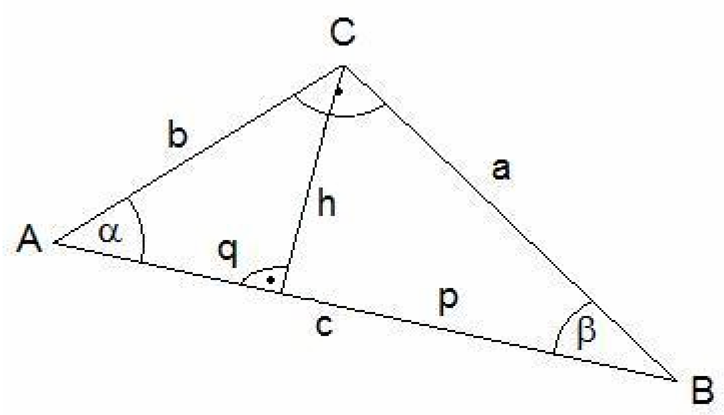
Pythagoras

Kommen wir als nächstes zum Satz von Pythagoras. Dieser gilt in rechtwinkligen Dreiecken, d.h. in Dreiecken, bei denen einer der Winkel gleich 90° beträgt. Wenn $\gamma = 90°$ ist, so würde der Satz des Pythagoras wie folgt lauten:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Die Seite gegenüber dem rechten Winkel heißt Hypotenuse. Wenn $\gamma = 90°$ ist, ist c die Hypotenuse. Die anderen beiden Seiten heißen Katheten. Wenn $\gamma = 90°$ ist, wären die Seiten a und b die Katheten. Allgemein sagt der Satz von Pythagoras, dass das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der Katheten ist. Wenn $\alpha = 90°$ wäre, würde dann $a^2 = b^2 + c^2$ gelten, da dann a die Hypotenuse wäre. Die Hypotenuse ist immer die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck.

Sind nun in einem rechtwinkligen Dreieck zwei Seiten bekannt, so kann die dritte berechnet werden.

Beispiele:
Es sei $\gamma = 90°$, a = 3cm und b = 4cm.

Wir rechnen erst mal ohne Einheiten:

$a^2 + b^2 = c^2$

$3^2 + 4^2 = c^2$

$9 + 16 = c^2$

$25 = c^2 \quad | \sqrt{\ }$

$c = 5$

Also ist c = 5cm. Wir rechnen noch mal mit Einheiten:

$a^2 + b^2 = c^2$

$(3cm)^2 + (4cm)^2 = c^2$

$9cm^2 + 16cm^2 = c^2$

$25cm^2 = c^2 \quad | \sqrt{}$

$c = 5cm$ (Hier benötigen wir nur die positive Lösung, da es sich um Dreiecksseiten handelt.)

Es sei $\gamma = 90°$, $c = 13cm$ und $b = 12cm$.

$a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 + (12cm)^2 = (13cm)^2$

$a^2 + 144cm^2 = 169cm^2 \quad | -144cm^2$

$a^2 = 25cm^2 \quad | \sqrt{}$

$a = 5cm$

Aufgaben:
1)
a) $\gamma = 90°$, $a = 8m$ und $b = 6m$.
b) $\gamma = 90°$, $a = 2dm$ und $c = 5dm$.
c) $\beta = 90°$, $a = 3cm$ und $c = 6cm$.
d) $\alpha = 90°$, $a = 1{,}3m$ und $b = 1{,}2m$.

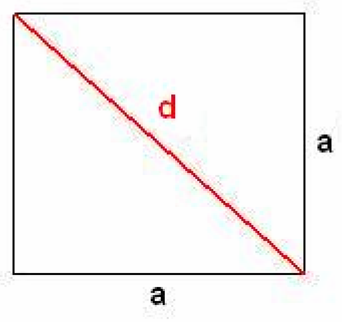
2)
a) Wie groß ist die Diagonale in einem Quadrat mit der Katenlänge 10cm?
b) Wie groß ist die Diagonale eines Monitors der 40cm breit und 30cm hoch ist?
c) Eine 10m lange Leiter wird an eine Wand gelehnt. Sie soll auf dem Boden einen Abstand von 3m von der Wand haben. Wie hoch kommt man mit dieser Leiter?
d) Ein gleichseitiges Dreieck hat eine Seitenlänge von 6cm. Wie groß ist die Höhe?

Lösungen:
1)
a) $c = 10m$
b) $b \approx 4{,}58dm$
c) $b \approx 6{,}71cm$
d) $c = 0{,}5m$

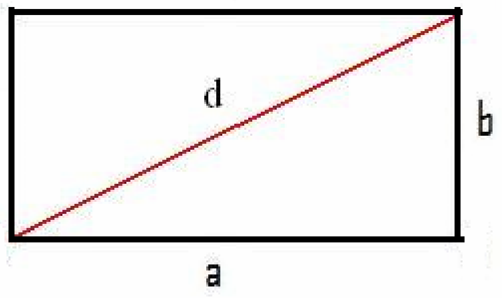
2)
a) $d^2 = a^2 + a^2$. Dies ergibt $d \approx 14{,}14cm$. Man kann auch direkt eine Formel für die Diagonale im Quadrat mit Seitenlänge a aufstellen:

$$d^2 = 2a^2 \quad | \sqrt{}$$

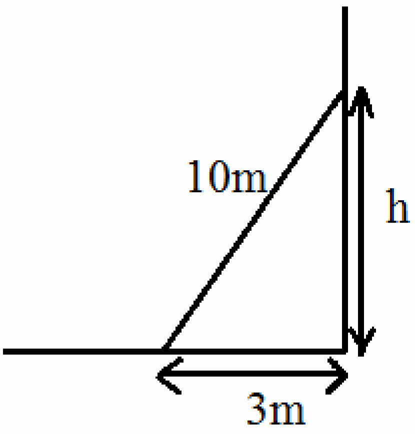
$$d = \sqrt{2} \cdot a$$



b) $d^2 = a^2 + b^2$. Dies ergibt d = 50cm.



c) Die Leiter ist die Hypotenuse (siehe Skizze).



Somit gilt:

$$(10m)^2 = (3m)^2 + h^2$$

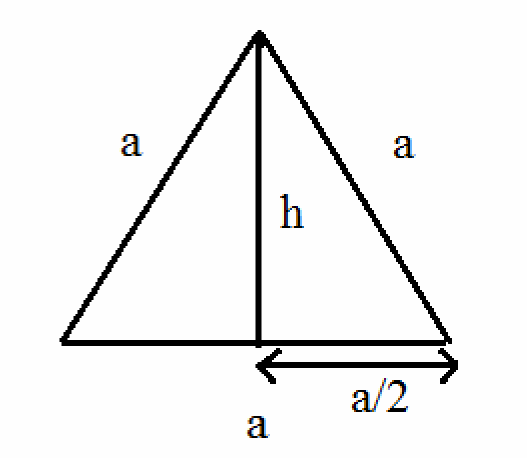
Damit ergibt sich: $h \approx 9{,}54m$

d) Wenn a die Seitenlänge ist, so gilt für die Höhe h:

$$a^2 = (a/2)^2 + h^2$$

$$(6cm)^2 = (3cm)^2 + h^2$$

Damit ergibt sich: h $\approx$ 5,20cm



Man kann hier auch eine Formel für die Höhe h in einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge a aufstellen:

$$a^2 = (a/2)^2 + h^2$$

$$a^2 = 1/4a^2 + h^2 \quad | -1/4a^2$$

$$3/4a^2 = h^2 \quad | \sqrt{}$$

$$h = \sqrt{3}/2 \cdot a$$