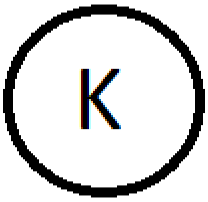
Wahrscheinlichkeitsrechnung für die Mittelstufe

Wir beginnen mit einem **Beispiel**, dem Münzwurf.

Es wird eine „faire“ Münze geworfen mit den Seiten K (für Kopf) und Z (für Zahl).



Fair heißt, dass jede Seite mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftritt.

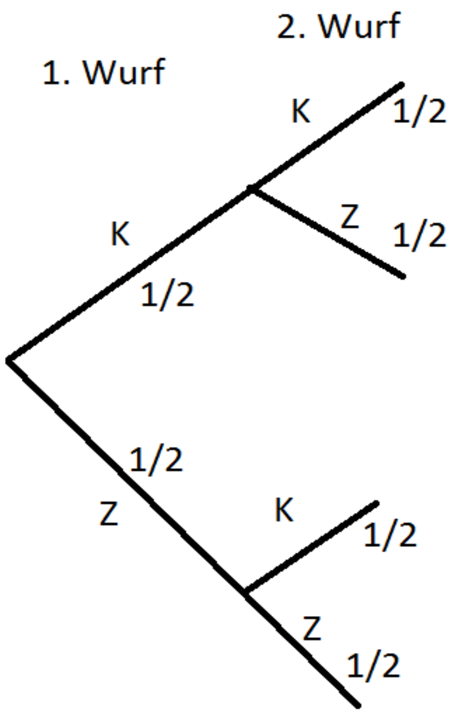
Die Wahrscheinlichkeit, dass nach einem Wurf die Seite K oben liegt, beträgt 50% bzw. $\frac{1}{2}$ oder 0,5 (da K auf einer von zwei Seiten steht). Man schreibt:

P(K) = $\frac{1}{2}$

P steht für *propability* = Wahrscheinlichkeit.

Analog gilt P(Z) = $\frac{1}{2}$.

Wird diese Münze zweimal hintereinander geworfen, kann man die Ergebnisse mit einem Wahrscheinlichkeitsbaum darstellen:



Nun gibt es 4 Möglichkeiten, was bei den zwei Würfen auftreten kann:

Zweimal K: (K, K)

Erst K, dann Z: (K, Z)

Erst Z, dann K: (Z, K)

Zweimal Z: (Z, Z)

Für die Wahrscheinlichkeit von (K, K) muss man die Wahrscheinlichkeiten entlang den entsprechenden Ästen multiplizieren

P((K, K)) = $\frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Analog ist P((K, Z)) = $\frac{1}{4}$

Nun kann man die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass kein Z fällt:

P(K, K) = $\frac{1}{4}$

Gibt es mehrere Äste, die in Frage kommen, so werden die Wahrscheinlichkeiten addiert (+):

P(„genau einmal K“) = P((K, Z)) + P(Z, K)) = $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

P(„mindestens einmal K“) = P((K, Z)) + P((Z, K)) + P((K, K)) = $\frac{3}{4}$ = 75%

Multipliziert man den Bruch der Wahrscheinlichkeit mit 100%, so ergibt sich die Prozentzahl $\frac{3}{4}$ * 100% = 0,75*100%= 75%.

Da sich alle Wahrscheinlichkeiten zu 1 addieren, kann man auch P(„mindestens einmal K“) über 1- P(„keinmal K“) = 1 - P((Z, Z)) bestimmen: P(„mindestens einmal K“) = 1 - $\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Wir kommen zum nächsten Beispiel, dem Werfen eines Würfels.

Beispiel:

Wir werfen eine fairen Würfel (der Seiten mit Nummern von 1 bis 6 hat). Die Ereignisse (bzw. Elementarereignisse), kann man mit Mengen darstellen. Ergebnis- oder Ereignismenge: S= {1,2, ... 6} (hier stehen alle möglichen Elementarereignisse).

Sei z.B. A das Ereignis, dass eine 6 gewürfelt wird:

A = {6}

P(A) = $\frac{1}{6}$ (auf einer der 6 Seiten steht eine 6)

Sei B das Ereignis, dass eine gerade Zahl gewürfelt wird:

$B = \{2, 4, 6\}$

B ist kein Elementarereignis, da B mehrere Elemente enthält.

$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (3 von 6 Seiten haben eine gerade Zahl)

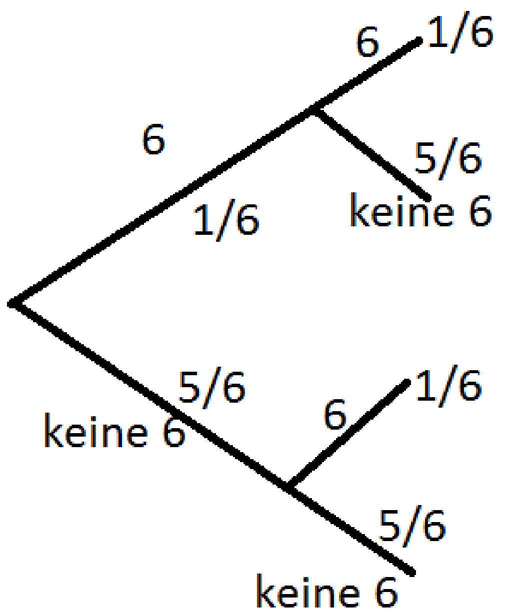
C: keine 6

$C = \{1, 2, \dots 5\}$ $P(C) = \frac{5}{6}$

Man schreibt auch $C = \overline{A}$. $\overline{A}$ ist das Komplement (Gegenteil) von A.

Es gilt $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ bzw. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Nun wird der Würfel zweimal geworfen und man kann die Ergebnisse wieder in einem Baumdiagramm darstellen. Dabei interessieren wir uns nur dafür, ob eine 6 oder keine 6 gewürfelt wird.



Gesucht werden folgende Wahrscheinlichkeiten:

a) Die Wahrscheinlichkeit für 2 Sechsen:

$P((6,6)) = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

b) Die Wahrscheinlichkeit für genau eine 6:

P(„genau eine 6“) = P((6, keine 6)) +P ((keine 6, 6))

$= \frac{1}{6} * \frac{5}{6} + \frac{5}{6} * \frac{1}{6}$

$= \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

Für die Anzahl Sechsen kann man auch eine Zufallsvariable X (großes X) verwenden.

X = Anzahl der Sechsen

P(„genau eine 6“) = P(X = 1) = $\frac{5}{18}$ (siehe b))

c) P(„keine 6“) = P(X = 0) = $\frac{5}{6} * \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

Bemerkung:
Summe der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Elementarereignisse ist wieder 1.

Damit gilt: P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1

Es können beim zweimaligen Werfen des Würfels nur keine 6 (X = 0), eine 6 (X = 1) oder zwei Sechsen (X = 2) auftreten.

Die Wahrscheinlichkeit für mindestens eine 6 wäre dann P(X ≥ 1) = P(X = 1) + P(X = 2) oder

P(X ≥ 1) = 1- P(X = 0) = 1 - $\frac{25}{36}$

$= \frac{11}{36}$

Hier ist eine Verteilungstabelle der Zufallsvariablen X:

k	0	1	2
P(X = k)	25/36	10/36 = 5/18	1/6*1/6 = 1/36

Die Verteilungstabelle enthält alle möglichen Werte der Zufallsvariable X mit Wahrscheinlichkeiten.

Aufgabe:
In einer Schale befinden sich 2 rote und 8 schwarze Kugeln.

Es werden 3 Kugeln gezogen und jede Kugel wird gleich wieder zurückgelegt (Ziehen mit Zurücklegen).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 3 rot sind?

(Wenn X = Anzahl rote Kugeln ist, dann wird hier P(X = 3) gesucht.)

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine rote Kugel gezogen wird?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine rote Kugel gezogen wird?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine rote Kugel gezogen wird?

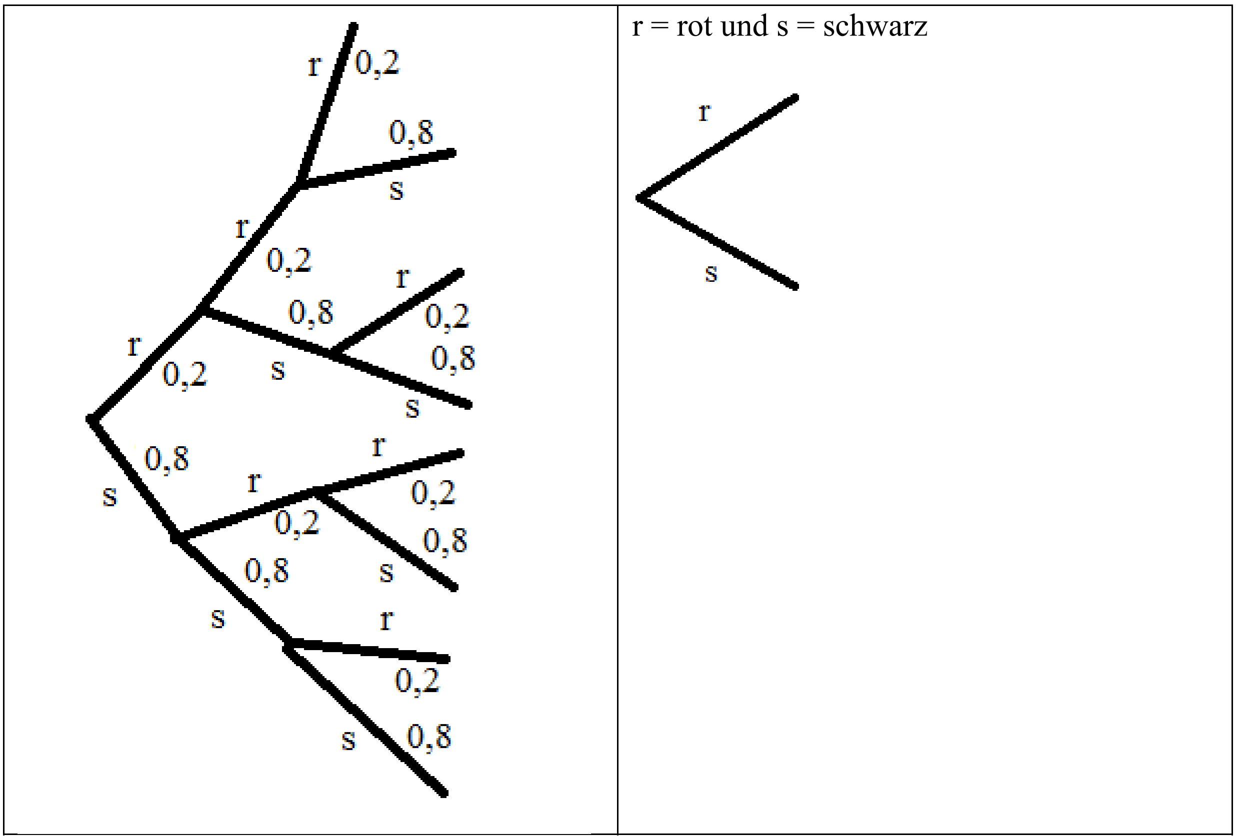
Lösung:

Es gilt für einen Zug:

P(„rot“) = $\frac{2}{2+8} = \frac{2}{10} = 0{,}2$

P(„schwarz“) = $\frac{8}{10} = 0{,}8$

Baumdiagramm:



a) P(X = 3) = 0,2*0,2*0,2 = $(0{,}2)^3$ = 0,008

b) P(X = 0) = 0,8*0,8*0,8 = $(0{,}8)^3$ = 0,512

c) Gesucht wird P(X = 1). Hier gibt es 3 mögliche Äste:

P(X = 1) = P((r, s ,s)) + P((s, r, s)) + P((s, s, r))

Die rote Kugel kann am Anfang, in der Mitte oder zum Schluss vorkommen.

P(X = 1) = 0,2*0,8*0,8+0,8*0,2*0,8+0,8*0,8*0,2

= 3*0,2*0,8*0,8 = 0,384

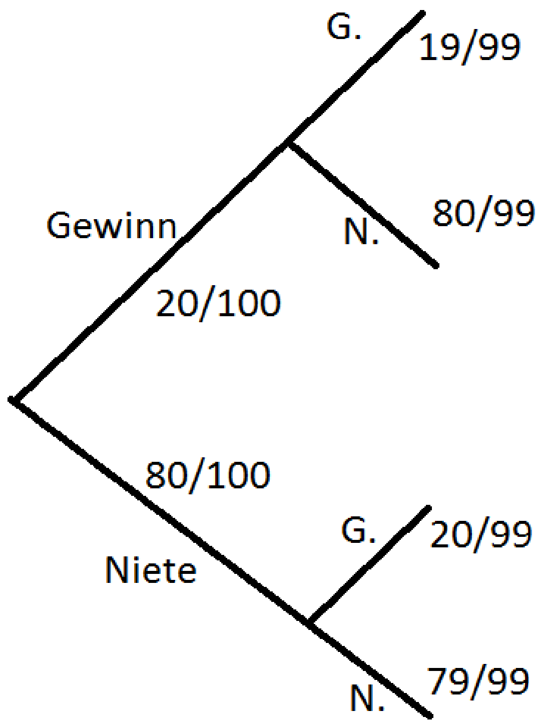
d) P(X ≥ 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,8*0,8*0,8 = 0,488

X = 0 ist Gegenteil von X ≥ 1, sonst müsste man sonst über 7 Äste summieren:

(r, s, s), (s, r, s), (s, s, r), (r, r, s), (r, s, r), (s, r, r), (r, r, r)

Beispielaufgabe:
Wir betrachten eine Urne mit Lose. Es befinden sich 100 Lose in einer Urne, wobei 20 Lose Gewinne sind (und damit 80 Nieten). Es werden 2 Lose gezogen (ohne zurücklegen). Gesucht wird die Wahrscheinlichkeit für keinen Gewinn, sowie die für 3 Gewinne.

Lösung:
Baumdiagramm:



Beim Ziehen ohne Zurücklegen ändert sich die Wahrscheinlichkeit bei jedem Zug. Hat man im ersten Zug einen Gewinn, dann gibt es noch 99 Lose in der Urne und 19 Gewinne. Deshalb ist die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn im zweiten Zug $\frac{19}{99}$.

X = Anzahl Gewinne

Wahrscheinlichkeit für keinen Gewinn:

$P(X = 0) = \frac{80}{100} * \frac{79}{99}$

Wahrscheinlichkeit für zwei Gewinne:

$P(X = 2) = \frac{20}{100} * \frac{19}{99}$

Grundlagen der Kombinatorik

Werden 3 Objekte in der Reihenfolge vertauscht, gibt es 3! = 3*2*1 Möglichkeiten (3! wird 3 Fakultät gesprochen). Hierfür gibt es eine extra Taste auf dem Taschenrechner.

Ein Mädchen hat 3 Freundinnen und möchte ein Bild machen, bei dem alle 3 nebeneinander stehen. Dabei hat sie 3! =6 Möglichkeiten.

Werden n Objekte in der Reihenfolge variiert (wenn man alle unterscheiden kann), gibt es n! Möglichkeiten für die Variationen.

Werden aus 10 Personen 3 ohne Beachtung der Reihenfolge ausgewählt, gibt es $\frac{10!}{3!*7!}$ = 120 Möglichkeiten.

Man schreibt: $\binom{10}{3}$ (Taschenrechner: nCr-Taste)

$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!*7!} = 120$ (Taschenrechner: 10 nCr-Taste 3)

Allgemein:
Werden aus n (verschiedene) Objekte k gezogen (ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge), so gibt es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Möglichkeiten.

Beim Lotto, dem Ziehen von 6 aus 49 Kugeln, gibt es $\binom{49}{6}$ = 13983816 Möglichkeiten.

Spielt die Reihenfolge eine Rolle, dann gibt es $\binom{n}{k}$ *k! Möglichkeiten (oder Taschenrechner: nPr-Taste).

Stehen 10 Pferde am Start, dann gibt es für die ersten 3 Plätze $\binom{10}{3}$ *3! = 720 Möglichkeiten.

Für weitere Beispiele siehe http://mathe-total.de/new-MS/Stochastik-MS.pdf oder http://mathe-total.de/Stochastik/Kombinatorik.pdf .