Quadratische Gleichungen

1) Es sollen die Lösungen folgender quadratischer Gleichungen bestimmt werden:

a) $x^2 = 25$

b) $2x^2 = 288$

c) $x^2 = -9$

2) Es werden die Lösungen folgender quadratischer Gleichungen gesucht:

a) $x^2 - 8x - 9 = 0$

b) $x^2 - 10x + 25 = 0$

c) $x^2 - 6x + 10 = 0$

d) $x^2 - 2x - 8 = 0$

e) $x^2 + x - 2 = 0$

f) $x^2 + 12x + 11 = 0$

g) $x^2 - 9 = 0$

h) $x^2 - 4x = 0$

i) $2x^2 + 12x + 16 = 0$

3) Gesucht wird auch die Lösung folgender quadratischer Gleichungen:

a) $2x^2 - 14x + 24 = 0$

b) $2x^2 + 16x + 24 = 0$

c) $3x^2 - 30x + 75 = 0$

d) $2x^2 - 4x - 16 = 0$

e) $-2x^2 - 4x + 30 = 0$

f) $-2x^2 + 6x - 4 = 0$

g) $2x^2 - 12x + 10 = 0$

h) $x^2 - 6x + 8 = 0$

4) Bei den folgenden quadratischen Gleichungen werden auch die Lösungen gesucht:

a) $(x - 4)(x + 5) = 0$ (Tipp: Nicht ausmultiplizieren /jeden Faktor Null setzen.)

b) $(x^2 - 4)(x - 2) = 0$

c) $x(x - 4) - 4x + 7 = 0$ (Tipp: Ab hier ausmultiplizieren, zusammenfassen und dann auf die Form = 0 bringen, damit man p-q-Formel anwenden kann.)

d) $(x - 4)(x + 6) = 11$

e) $2(x - 2)(x + 2) - 10 = 0$

f) $4x(x - 3) = 4x^2 - 10x - 3$

g) $(x - 4)(x + 3) + x(x - 2) = 23$

Lösung:

1)a) $x^2 = 25 \quad | \sqrt{}$

$x = 5$ oder $x = -5$. Die zweite Lösung wird oft vergessen, denn auch $(-5)^2 = 25$.
Man schreibt auch $x_1 = 5$ und $x_2 = -5$ (die Reihenfolge ist egal).
Es ergibt sich die Lösungsmenge:

$\mathbb{L} = \{-5; 5\}$

b) $2x^2 = 288 \quad | :2$

$x^2 = 144 \quad | \sqrt{}$

$x_{1/2} = \pm 12$

$\mathbb{L} = \{-12; 12\}$

c) $x^2 = -9 \quad | \sqrt{}$

Hat keine (reelle) Lösung, denn keine (reelle) Zahl mit sich selbst multipliziert kann negativ sein.

Bei den nächsten Aufgaben wenden wir die p-q-Formel an. Man könnte auch die quadratische Ergänzung (siehe http://mathe-total.de/Mittelstufe-Aufgaben/Parabeln.pdf S. 8) anwenden. Diese wird aber in der Regel nur angewendet, wenn man die p-q-Formel noch nicht kennt, oder wenn es die Aufgabenstellung verlangt.

2) a)

$x^2 - 8x - 9 = 0$

$p = -8$; $q = -9$ (für die p-q-Formel)

$x_{1/2} = -p/2 \pm\sqrt{(p/2)^2 - q}$

$= 4\pm\sqrt{16+9}$

$x_{1/2} = 4\pm\sqrt{25} = 4 \pm 5$

$x_1 = 4 + 5 = 9$

$x_2 = 4 - 5 = -1$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-1; 9\}$

b)

$x^2 - 10x + 25 = 0$

$x_{1/2} = 5 \pm \sqrt{25-25}$

$= 5$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{5\}$

c)

$x^2 - 6x + 10 = 0$

$x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9-10}$

$= 3 \pm \sqrt{-1}$ (keine Lösung, da negative Zahl unter der Wurzel)

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{ \quad \}$

d)

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+8}$

$= 1 \pm 3$

$x_1 = 1 + 3 = 4$
$x_2 = 1 - 3 = -2$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-2; 4\}$

e)

$x^2 + x - 2 = 0$

$x_{1/2} = -1/2 \pm \sqrt{1/4 + 2} = -1/2 \pm \sqrt{9/4}$

$x_1 = -1/2 + 3/2 = 1$
$x_2 = -1/2 - 3/2 = -2$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-2; 1\}$

f)

$x^2 - 12x + 11 = 0$

$x_{1/2} = 6 \pm \sqrt{36 - 11}$

$= 6 \pm 5$

$x_1 = 6 + 5 = 11$
$x_2 = 6 - 5 = 1$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{1; 11\}$

g)

$x^2 - 9 = 0$

Hier ist $p = 0$:

$x_{1/2} = 0 \pm \sqrt{0 + 9}$

$= \pm 3$

$x_1 = 3$
$x_2 = -3$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-3; 3\}$

Es geht hier ohne p-q-Formel „schneller“:

$x^2 - 9 = 0 \quad | + 9$

$x^2 = 9 \quad |\sqrt{}$

$x_{1/2} = \pm 3$

h)

$x^2 - 4x = 0$

Hier ist q = 0:

$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-0}$

$= 2 \pm 2$

$x_1 = 4$
$x_2 = 0$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{0; 4\}$

Hier geht es auch ohne p-q-Formel „schneller", man kann vorklammern:

$x^2 - 4x = 0$

$x(x-4) = 0$

Ein Produkt ist Null, wenn ein Faktor gleich 0 ist.

D.h.: a*b = 0, wenn a = 0 oder b = 0 (Schließt auch mit ein, dass a = 0 und b = 0).

$x(x-4) = 0$

$x = 0$ oder $x - 4 = 0 \quad |+4$

Damit ergibt sich $x = 0$ oder $x = 4$: $x_1 = 0$; $x_2 = 4$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{0; 4\}$

Noch ein Beispiel hierzu:

$3(x - 4)(x + 5) = 0$

$x_1 = 4$ und $x_2 = -5$ => Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-5; 4\}$

Setzt man z.B. 4 ein, dann ist $3(4-4)(4+5) = 3 \cdot 0 \cdot 9 = 0$.

$\text{Zahl} \cdot 0 = 0$!

i)

x^2 muss ohne Faktor ±1 da stehen, damit man die p-q-Formel verwenden kann.

$2x^2 + 12x + 16 = 0 \quad |:2$

$x^2 + 6x + 8 = 0$

$x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9-8} = -3 \pm 1$

$x_1 = -2$
$x_2 = -4$

3)

a)

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{3; 4\}$

b)

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-6; -2\}$

c)

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{5\}$

d)

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-2; 4\}$

e)

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-5; 3\}$

f)

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{1; 2\}$

g)

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{1; 5\}$

h)

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{2; 4\}$

4) a) $(x-4)(x+5) = 0$

Wir setzen jeden Faktor Null, dann brauchen wir nicht ausmultiplizieren.

$x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 4$

$x + 5 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = -5$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-5; 4\}$

b)

$(x^2 - 4)(x - 3) = 0$

$x^2 - 4 = 0 \quad |+4$ (oder p-q- Formel $p = 0$; $q = -4$)

$x^2 = 4 \quad |\sqrt{\ }$

$x_{1/2} = \pm 2$

$x-3=0 \quad |+3$

$x = 3$, also $x_3 = 3$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-2; 2; 3\}$

c)

Hier geht die einfache Variante (Produkte = 0) nicht mehr, da die Gleichung nicht die Form

$x(x-4) = 0$

hat. Man muss ausmultiplizieren:

$x(x - 4) - 4x + 7 = 0$

$x^2 - 4x - 4x + 7 = 0$

$x^2 - 8x + 7 = 0$

$p = -8$; $q = 7$

$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 - 7}$

$= 4 \pm 3$

$x_1 = 7$
$x_2 = 1$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{1; 7\}$

d)

$(x - 4)(x + 6) = 11$

$x^2 + 6x - 4x - 24 = 11 \; |-11$

$x^2 + 2x - 35 = 0$

$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1 + 35}$

$= -1 \pm 6$

$x_1 = 5 \quad x_2 = -7$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-7; 5\}$

e)

$2(x - 2)(x + 2) - 10 = 0$

$2(x^2 - 4) - 10 = 0$

$2x^2 - 8 - 10 = 0$

$2x^2 - 18 = 0 \quad |:2$

$x^2 - 9 = 0 \quad | + 9$

$x^2 = 9 \quad | \sqrt{}$

$x_{1/2} = \pm 3$

$x_1 = 3 \quad x_2 = -3$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-3; 3\}$

f)

$4x(x - 3) = 4x^2 - 10x - 3$

$4x^2 - 12x = 4x^2 - 10x - 3 \quad | -4x^2$

$-12x = -10x - 3 \quad | +10x$

$-2x = -3 \quad | :(-2)$

$x = 3/2$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{3/2\}$

g)

$(x - 4)(x + 3) + x(x - 2) = 23$

$x^2 + 3x - 4x - 12 + x^2 - 2x = 23$

$2x^2 - 3x - 12 = 23 \quad | -23$

$2x^2 - 3x - 35 = 0 \quad | :2$

$x^2 - 3/2x - 35/2 = 0$

$x_{1/2} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{35}{2}} = \frac{3}{4} \pm \frac{17}{4}$

$x_1 = 5 \quad x_2 = - 3/2 = -3,5$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{ -3,5; 5\}$

Sie auch http://mathe-total.de/Test-p-q-Formel. Nullstellen sind die Lösungen der Gleichung f(x) = 0 (bzw. y = 0).