

## Zinsrechnung (überjährig mit Zinseszins)

Mit der folgenden Formel kann man den Kontostand nach n Jahren berechnen, wenn man n Jahre ein Kapital von K zu einem Zinssatz von p anlegt (und die Zinsen mit verzinst werden):

$$K_n = K \cdot (1 + p/100)^n$$

### Beispiel:

Es werden 1000 € zu einem Zinssatz von 2% für 5 Jahre angelegt. Damit hätte man nach 5 Jahren insgesamt

$$K_5 = 1000€ \cdot (1 + 2/100)^5 = 1000€ \cdot 1,02^5 \approx 1104,08€$$

### Aufgaben:

Bei den Lösungen soll auf 2 Stellen nach dem Komma gerundet werden.

Kapital (K) in €	20.000,00	3.000,00	5.800,00
Zinssatz (p) in %	5	2	2,5
Jahre (n)	6	8	4
Kapital in n Jahren ( $K_n$ ) in €			

### Lösungen:

Kapital (K) in €	20.000,00	3.000,00	5.800,00
Zinssatz (p) in %	5	2	2,5
Jahre (n)	6	8	4
Kapital in n Jahren ( $K_n$ ) in €	26.801,91	3.514,98	6.402,11

Benötigt man in n Jahren ein Kapital von  $K_n$  und man hat p und n gegeben, dann kann man K über

$$K = K_n / (1 + p/100)^n$$

berechnen.

### Beispiel:

Es werden in 2 Jahren 11025€ benötigt. Wie viel muss dann heute anlegt werden, wenn es 5% Zinsen gibt?

$$\text{Hier ist also } K_2 = 11025€ : \quad K = 11025€ / (1 + 5/100)^2 = 11025€ / 1,05^2 = 10000€$$

*Die folgenden Beispiele und Aufgaben werden oft erst ab der 9. oder 10. Klasse behandelt:*  
Beim nächsten Fall sind das Anfangskapital K, die Jahre n und das Kapital in n Jahren ( $K_n$ ) gegeben und es wird der Zinssatz p gesucht. Wir leiten die Formel her:

$$\begin{aligned} K_n &= K \cdot (1 + p/100)^n & | : K \\ K_n / K &= (1 + p/100)^n & | \sqrt[n]{\phantom{x}} \\ \sqrt[n]{K_n / K} &= 1 + p/100 & | -1 \end{aligned}$$

$$\sqrt[n]{K_n / K} - 1 = p/100 \quad | \cdot 100$$

Also:

$$p = 100 \cdot (\sqrt[n]{K_n / K} - 1) \quad \text{oder} \quad p = 100 \cdot \sqrt[n]{K_n / K} - 100$$

**Beispiel:**

Laura erzählt, dass sie 1000€ für 3 Jahre angelegt hat und dafür gab es 124,86€ Zinsen. Wie hoch war der Zinssatz?

Hier ist  $K_3 = 124,86€ + 1000€ = 1124,86€$  :  $p = 100 \cdot \sqrt[3]{1124,86/1000} - 100 \approx 4$  , also ca. 4%.

Beim letzten Fall sind das Anfangskapital  $K$ , der Zinssatz  $p$  und das Kapital in  $n$  Jahren ( $K_n$ ) gegeben und es werden die Jahre ( $n$ ) gesucht. Wir leiten die Formel her:

$$K_n = K \cdot (1 + p/100)^n \quad | : K$$

$$K_n / K = (1 + p/100)^n \quad | \lg()$$

$$\lg(K_n / K) = n \cdot \lg(1 + p/100) \quad | : \lg(1 + p/100)$$

Also:

$$n = \frac{\lg(K_n / K)}{\lg(1 + p/100)} \quad \text{oder} \quad n = \log_{1+p/100}(K_n / K)$$

**Beispiel:**

Wie viele Jahre muss man warten, damit bei einem Zinssatz von 3% aus einem Anfangskapital von 1000€ ein Kapital von 1500€ wird?

$$n = \frac{\lg(1500/1000)}{\lg(1 + 3/100)} \approx 13,72$$

Damit muss man eigentlich 14 Jahre warten, da die Zinsen in der Regel erst zum Jahresende gezahlt werden.

**Weitere Aufgaben:**

Bei den Lösungen soll auf 2 Stellen nach dem Komma gerundet werden.

Kapital (K) in €		8.000,00	10.000,00
Zinssatz (p) in %	1,5		5
Jahre (n)	2	10	
Kapital in n Jahren ( $K_n$ ) in €	5.000,00	9.500,00	12.000,00

**Lösungen:**

Kapital (K) in €	4.853,31	8.000,00	10.000,00
Zinssatz (p) in %	1,5	1,73	5
Jahre (n)	2	10	3,74
Kapital in n Jahren ( $K_n$ ) in €	5.000,00	9.500,00	12.000,00