

Aufgaben Exponentialfunktion

Wir gehen hier von der Form $f(x)=b \cdot a^x$ für die Exponentialfunktion aus. In der Oberstufe wird hierfür oft $f(x) = b \cdot e^{kx}$ geschrieben mit der Euler'schen Zahl e . Dann wäre hier $k = \ln(a)$ oder $a = e^k$.

Aufgaben:

- 1) Am Anfang gab es 1000 Bakterien in einer Probe. Nach 3 Minuten waren es 3375 Bakterien.
 - a) Wie lautet die Gleichung der Exponentialfunktion für die Zuordnung: Zeit in Minuten → Anzahl Bakterien?
 - b) Wie viele Bakterien sind es nach diesem Modell in 10 Minuten?

- 2) Luna hat 2000€ auf einem Konto angelegt. Die Bank zahlt 1,5% Zinsen.
 - a) Wie lautet die Gleichung der Exponentialfunktion (Zeit in Jahren → Kontostand), wenn auch für die Zinsen in den folgenden Jahren Zinsen gezahlt werden (Zinseszins)?
 - b) Wie viel Geld hat Sie in 4 Jahren auf dem Konto?
 - c) Wann sind es 2252,99€?

- 3) Der Akku eines Smartphones verliert im Betrieb pro Tag 20% an Leistung. Wie viel Leistung hat er nach 10 Tagen verloren?

- 4) 10 Schüler kennen ein Gerücht. Jede Person erzählt es pro Tag 3 Personen weiter. Wann kennt es die ganze Schule mit 810 Schülern?

- 5) 2010 hatten 1 Millionen Personen das Smartphone X. Im Jahr 2014 waren es 2,0736 Millionen. Wie viele werden es im Jahr 2020 sein?

- 6) Tamara hat ein neues Auto gekauft. Nach 2 Jahren ist dieses noch 28900€ wert und nach 5 Jahren noch 17748,21€.
 - a) Wie viel hat dieses beim Kauf gekostet?
 - b) Wie viel ist es noch in 10 Jahren wert?

Lösung

1) a)

$$f(x) = a \cdot b^x$$

$$f(0) = a \cdot b^0 = 1000$$

$$\Rightarrow a = 1000 \quad (\text{da } b^0 = 1)$$

$$f(3) = a \cdot b^3 = 3375 \quad (1)$$

$$\text{Wir setzen } a = 1000 \text{ in (1) ein: } \quad 1000 \cdot b^3 = 3375 \quad | : 1000$$

$$b^3 = 3,375 \quad | \sqrt[3]{\quad}$$

$$b = 1,5$$

$$\text{Also: } f(x) = 1000 \cdot 1,5^x$$

$$\text{a) } f(10) = 1000 \cdot 1,5^{10} \approx 57665$$

Also sind es nach 10 Minuten ca. 57665 Bakterien.

2) a) Hier ist $a = 2000$ (Anfangswert) und $b = 1,015 = 1 + \text{Zinssatz}/100$, denn nach einem Jahr hätte sie

$$2000 + 2000 \cdot \frac{1,5}{100} = 2000 \cdot \left(1 + \frac{1,5}{100}\right) \\ = 2000 \cdot 1,015 = 2030 \text{€}.$$

$$\text{Also: } f(x) = 2000 \cdot 1,015^x$$

$$\text{b) } f(4) = 2000 \cdot 1,015^4 \approx 2122,73 \text{€}$$

$$\text{c) } x = ? \quad f(x) = 2252,99$$

$$2000 \cdot 1,015^x = 2252,99 \quad | : 2000$$

$$1,015^x = 1,126495 \dots \quad (\text{Ergebnis im Taschenrechner lassen})$$

$$1,015^x = 1,126495 \dots \quad | \log_{1,015}(\quad)$$

$$x = \log_{1,015}(1,126495 \dots) \approx 8, \text{ also ca. 8 Jahre.}$$

3) $a = 100$ (Wir setzen a auf 100%, man hätte auch $a = 1$ setzen können).

$$b = 1 - \frac{\text{prozentualer Verlust}}{100} = 1 - \frac{20}{100} = 0,8$$

$$f(x) = 100 \cdot 0,8^x$$

$$\text{Nach 10 Tagen: } f(10) \approx 10,74$$

Damit sind nach 10 Tagen noch ca. 10,74% Restleistung vorhanden:

Verlust $\approx 100\% - 10,74\% = 82,26\%$

4) $a = 10$

$$b = 3$$

$$f(x) = 100 \cdot 3^x$$

$$10 \cdot 3^x = 810 \quad | : 10$$

$$3^x = 81 \quad | \log_3 () \qquad x = \log_3 (81) = 4$$

5) Wir wählen 2010 als Jahr 0 ($x = 0$), damit ist 2014 das Jahr 4. $b = 1$ (Mio.)

$$f(x) = 1 \cdot a^x = a^x$$

$$f(4) = a^4 = 2,0736 \quad | \sqrt[4]{\quad}$$

$a = 1,2$ (hier darf man nur die positive Lösung verwenden)

$$f(x) = 1,2^x$$

Das Jahr 2020 ist das Jahr 10.

$$f(10) = 1,2^{10} \approx 6,19 \text{ (Mio.)}$$

6) $f(x) = b \cdot a^x$

$$f(2) = b \cdot a^2 = 28900 \quad (1)$$

$$f(5) = b \cdot a^5 = 17748,21 \quad (2)$$

Wir lösen (1) nach b auf:

$$b \cdot a^2 = 28900 \quad | : a^2$$

$$b = 28900/a^2 \quad (3)$$

Dies setzen wir in (2) ein: $\frac{28900}{a^2} \cdot a^5 = 17748,21$

$$28900 \cdot a^3 = 17748,21 \quad (\text{da } a^n/a^m = a^{n-m} \text{ ist})$$

$$a^3 = 17748,21/28900 \quad | \sqrt[3]{\quad}$$

$$a \approx 0,85 \quad \text{Setzt man dies in (3) ein, ergibt sich } b \approx 28900/0,85^2 = 40000$$

Damit ist $f(x) = 40000 \cdot 0,85^x$ und der Anfangspreis beträgt 40000€ (Antwort zu a)).

b) $f(10) = 40000 \cdot 0,85^{10} \approx 7874,98$, womit das Auto nach 10 Jahren noch ca. 7874,98€ wert ist.