Beispiel zum Differentialquotienten

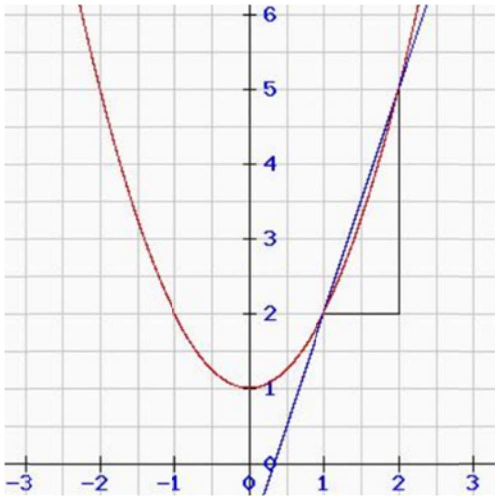
Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2 + 1$. Es soll die Steigung m_S der Sekanten durch die Punkte $P(x_0; f(x_0))$ und $Q(x_0 + h; f(x_0 + h))$ für $x_0 = 1$ und verschiedene h bestimmt werden. Wir beginnen mit h = 1:

Damit ergeben sich die Punkte P(1; 2) und Q(2; 5), da f(1) = 2 und f(2) = 5 gilt. Allgemein gilt für die Steigung m einer Geraden durch die Punkte $P(x_1; y_1)$ und $Q(x_2; y_2)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Also erhalten wir:

$$m_S = \frac{5-2}{3-1} = 3$$



Wollen wir die Sekantensteigung für verschiedene h bestimmen, können wir auch erst vereinfachen:

Mit $P(x_0; f(x_0))$ und $Q(x_0 + h; f(x_0 + h))$ gilt:

$$m_S = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2+1-(x_0^2+1)}{h} = \frac{x_0^2+2x_0h+h^2+1-x_0^2-1}{h} = \frac{2x_0h+h^2}{h}$$

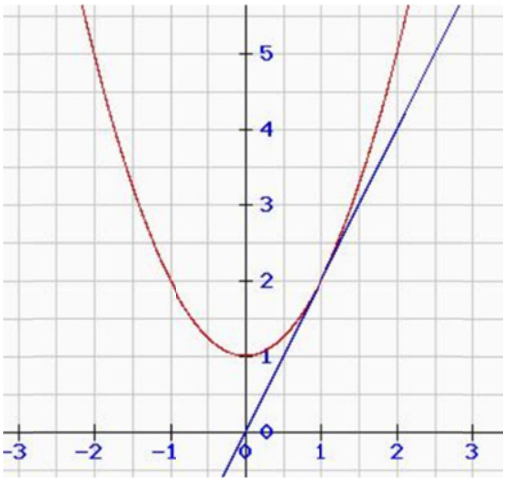
Wenn wir nun h im Zähler ausklammern, können wird der Bruch noch kürzen:

$$m_S = \frac{h(2x_0+h)}{h} = 2x_0 + h$$

Wir hatten $x_0 = 1$ gewählt:
Für h = 1 erhalten wir: $m_S = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ (wie bereits bekannt)
Für h = 0,1 erhalten wir: $m_S = 2 \cdot 1 + 0{,}1 = 2{,}1$
Für h = 0,001 erhalten wir: $m_S = 2 \cdot 1 + 0{,}001 = 2{,}001$

Nun betrachten wir den Grenzfall für h gegen 0, womit wir die Steigung der Tangenten an der Stelle x = 1 erhalten, die mit f'(1) bezeichnet wird:

f'(1) = $\lim\limits_{h \to 0} 2 \cdot 1 + h = 2 + 0 = 2$



Allgemein gilt („h-Methode"):

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Für die Funktion f(x) = x^2 + 1 erhalten wir:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 + 1 - (x_0^2 + 1)}{h} = \cdots = \lim_{h \to 0} 2x_0 + h = 2x_0$$

Damit hat f(x) = x^2 + 1 die Ableitung f'(x) = 2x.

Nun könnten wir für diese Funktion auch die Steigung an der Stelle x = 4 berechnen: f'(4) = 8

Wir hätten die Ableitung auch über

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

bestimmen können.

Bemerkung:
So wie f(x_0) der Funktionswert (der „y-Wert") an der Stelle x = x_0 ist, ist f'(x_0) die Steigung der Funktion f an der Stelle x = x_0. Eine Gerade hat an jeder Stelle die gleiche Steigung:

$$f(x) = mx + b \Rightarrow f'(x) = m$$