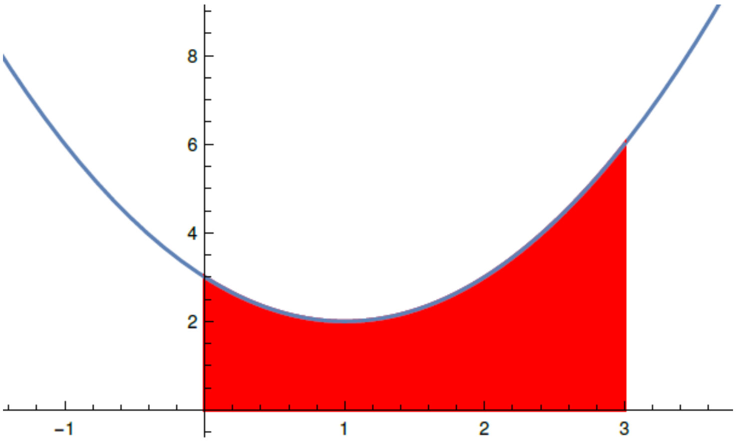
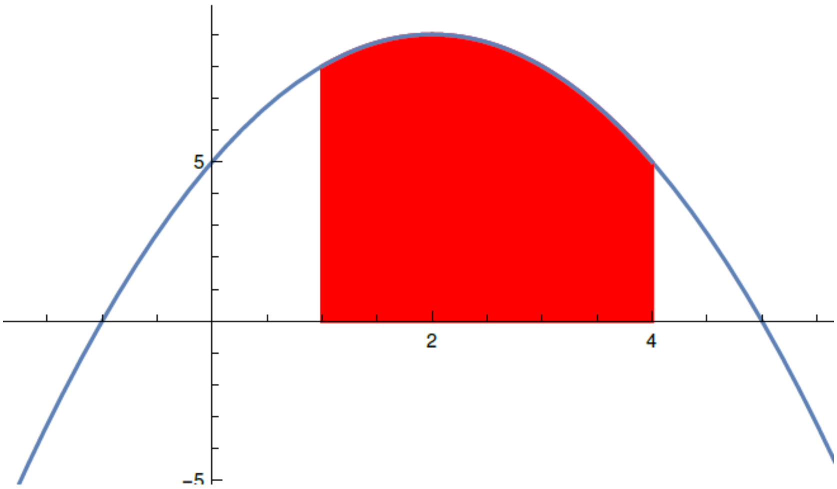
Integralrechnung

Gesucht wird die Fläche zwischen der Kurve der Funktion f und der x-Achse im dargestellten Bereich:

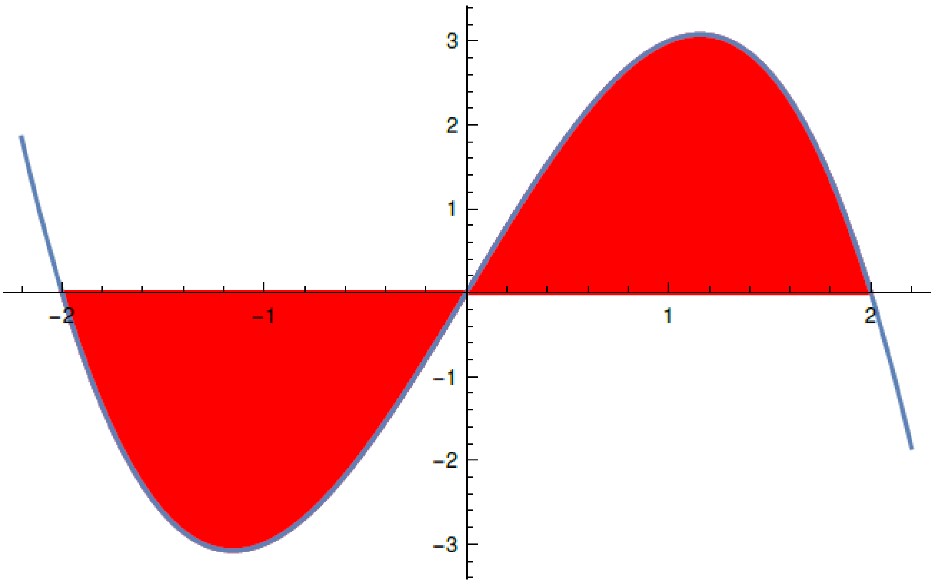
a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$



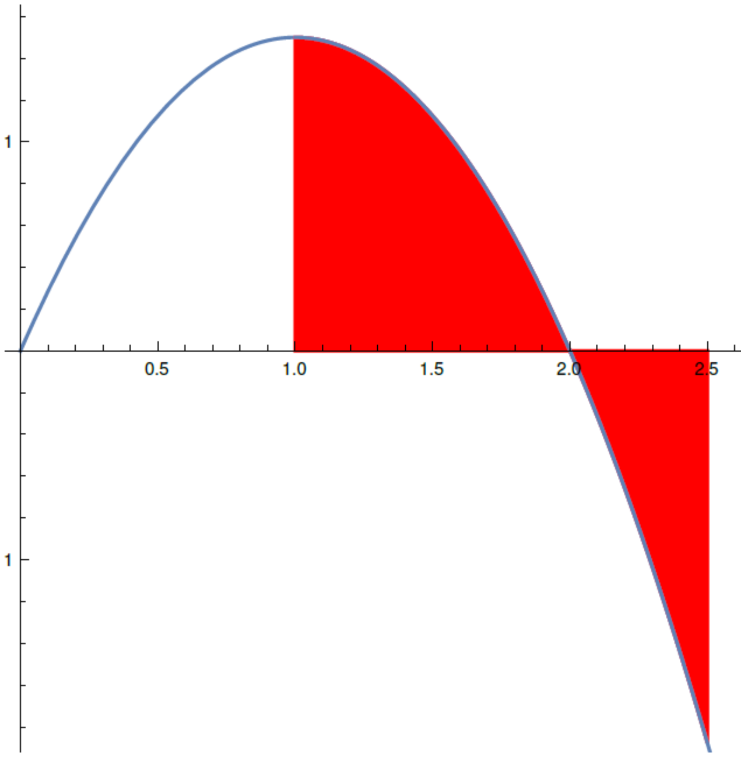
b) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$



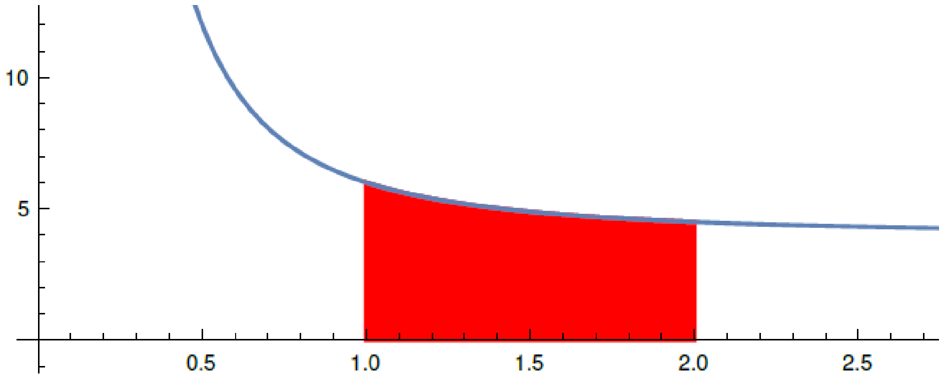
c) $f(x) = -x^3 + 4x$



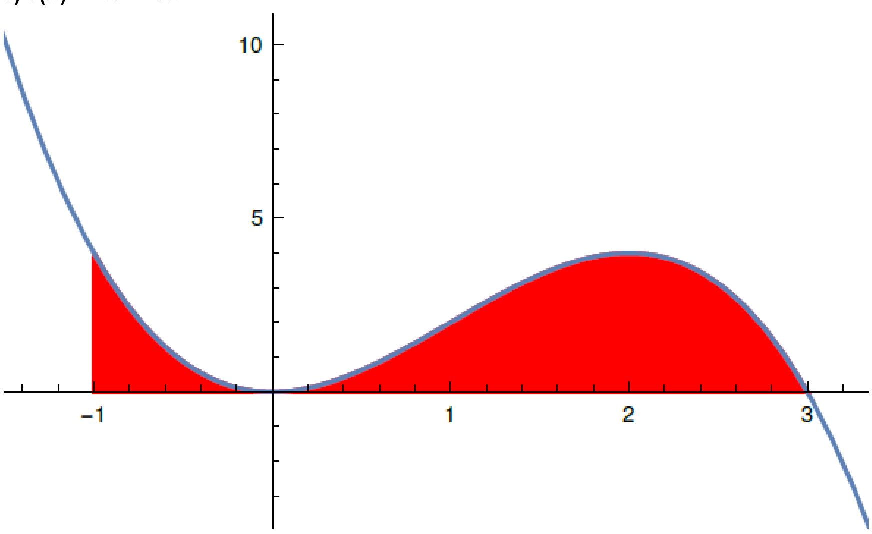
d) $f(x) = -1{,}5x^2 + 3x$



e) $f(x) = 2/x^2 + 4$



f) $f(x) = -x^3 + 3x^2$



Lösungen:

Allgemein ist bei diesen Aufgaben zu beachten, dass keine Nullstellen (in denen die x-Achse geschnitten wird) im Integrationsintervall liegen, andernfalls muss dieses aufgeteilt werden.

a) $\int_0^3 (x^2 - 2x + 3)dx = [1/3 \cdot x^3 - x^2 + 3x]_0^3 = 1/3 \cdot 3^3 - 3^2 + 3 \cdot 3 - 0 = 9$ (FE)

b) $\int_1^4 (-x^2 + 4x + 5)dx = [-1/3 \cdot x^3 + 2x^2 + 5x]_1^4 = -1/3 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4 - (-1/3 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1)$
$= 24$ (FE)

c) $A_1 = \int_0^2 (-x^3 + 4x)dx = [-1/4 \cdot x^4 + 2x^2]_0^2 = -1/4 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^2 - 0 = 4$ (FE)
Wegen der Punktsymmetrie ist $A_2 = A_1 = 4$ (FE)
Die Gesamtfläche beträgt: $A = A_2 + A_1 = 8$ (FE)

d) Die Funktion $f(x) = 1{,}5x^2 - 3x$ hat eine Nullstelle bei $x = 2$ im Integrationsintervall $I = [1; 2{,}5]$. Damit muss die Berechnung der Fläche auf zwei Integrale aufgeteilt werden:

$A_1 = \int_1^2 (-1{,}5x^2 + 3x)dx = [-1/2 \cdot x^3 + 3/2 \cdot x^2]_1^2 = -1/2 \cdot 2^3 + 3/2 \cdot 2^2 - (-1/2 + 3/2) = 1$ (FE)

$A_2 = \left|\int_2^{2{,}5} (-1{,}5x^2 + 3x)dx\right| = \left|[-1/2 \cdot x^3 + 3/2 \cdot x^2]_2^{2{,}5}\right|$
$= |-1/2 \cdot 2{,}5^3 + 3/2 \cdot 2{,}5^2 - (-1/2 \cdot 2^3 + 3/2 \cdot 2^2)| = 7/16$ (FE)

Die Gesamtfläche beträgt: $A = A_2 + A_1 = 23/16$ (FE) $= 1{,}4375$ (FE)

e) Es gilt: $f(x) = 2/x^2 + 4 = 2x^{-2} + 4$

$A_1 = \int_1^2 (2x^{-2} + 4)dx = [-2x^{-1} + 4x]_1^2 = = [-2/x + 4x]_1^2 = -2/2 + 4 \cdot 2 - (-2/1 + 4) = 5$ (FE)

f) Im Integrationsintervall $I = [-1; 3]$ hat $f(x) = -x^3 + 3x^2 = x^2 \cdot (-x + 3)$ eine Nullstelle (bei $x = 0$). Allerdings ist dies eine doppelte Nullstelle, d.h. die x-Achse wird nicht bei $x = 0$ geschnitten, sondern nur berührt. Damit müssen nicht zwei Integrationsintervalle $[-1; 0]$ und $[0; 3]$ betrachtet werden, wie können über das gesamte Intervall I integrieren.

$A = \int_{-1}^3 (-x^3 + 3x^2)dx = [-1/4 \cdot x^4 + x^3]_{-1}^3 = -1/4 \cdot 3^4 + 3^3 - (-1/4 \cdot (-1)^4 + (-1)^3) = 8$ (FE)